
Verfahren zur Grundausslegung von Tragwerkstrukturen mit Hybrid-Rohren

Johannes Stöckl



Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Ingenieurwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität des Saarlandes

von
Johannes Stöckl, M.Eng.

Saarbrücken
2020

Tag des Kolloquiums: 26.06.2020

Dekan:	Prof. Dr. Guido Kickelbick
Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels Prof. Dr.-Ing. Prof. h.c. Jörg Wellnitz Prof. Dr.-Ing. Hans-Georg Herrmann
Vorsitz:	Prof. Dr.-Ing. Michael Vielhaber
Akad. Mitarbeiter:	Dr.-Ing. Frank Aubertin

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als Projektingenieur am Institut für Technik und Design GmbH unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Prof. h.c. Jörg Wellnitz, in Kooperation mit dem Lehrstuhl für Technische Mechanik an der Universität des Saarlandes unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels.

Besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels für die Betreuung meiner Arbeit. Sowohl die fachlichen Diskussionen und Ideen als auch die Hilfe in organisatorischen Belangen haben maßgeblich zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Besonders hervorheben möchte ich, dass ich als externer Doktorand stets das Gefühl hatte zum Team zu gehören.

Ebenso möchte ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Prof. h.c. Jörg Wellnitz für die Betreuung meiner Arbeit bedanken, der mit dem Institut für Technik und Design die nötigen Rahmenbedingungen zur Durchführung der Arbeit geschaffen hat. Die zu bearbeitenden Projekte waren sehr abwechslungsreich, sodass ich Wissen in vielen Bereichen erwerben konnte.

Weiterhin möchte ich Prof. Dr.-Ing. Hans-Georg Herrmann für die Begutachtung meiner Arbeit danken.

Meinem Bruder Martin Stöckl M.Sc. möchte ich für die vielen Diskussionen, insbesondere bzgl. der Programmierung in Python sowie der Korrekturlesungen danken.

Ivo Bauer B.Eng. möchte ich für die immerwährende Bereitschaft zum Korrekturlesen aller meiner schriftlichen Erzeugnisse danken.

Mein Dank gilt auch Dr.-Ing. Stefan Herrmann für die moralische Unterstützung in der gesamten Zeit. Die unvermeidlichen Rückschläge stellten sich meist nach den Diskussionen als kleiner dar als zunächst angenommen.

Des Weiteren möchte ich mich bei allen Kollegen am Institut für Technik und Design bedanken. Insbesondere möchte ich Dr. Michael Roth und Raphael Miehl M.Eng. hervorheben und mich für die gute Zusammenarbeit in gemeinsamen Projekten, aber auch für die gegenseitige Hilfe bedanken. Ebenso freut es mich, dass sich abseits der Arbeit auch eine Freundschaft entwickelt hat und ich auf viele schöne gemeinsame Erinnerungen zurückblicken kann.

Bei meiner Frau Dina und meinem Sohn Noah möchte ich mich für das Verständnis bedanken, dass ich nicht immer so viel Zeit für sie aufbringen konnte wie ich gerne mit ihnen verbracht hätte. Sie waren mir in dieser Phase eine große Unterstützung und gaben mir viel Rückhalt.

Zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mich während meines Studiums und der Zeit als Doktorand stets unterstützt haben.

Ingolstadt, September 2020

Johannes Stöckl

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der näherungsweise Auslegung von Tragwerken aus Metall-Faserverbundkunststoffrohren zur Anwendung als Überrollschutz-Vorrichtung. Neben der Auslegung der Hybrid-Rohre soll ebenfalls die Topologie, also die Anordnung der Rohre betrachtet werden. Das Verfahren basiert auf der Berechnung der Verschiebungen und der Schnittkraftverläufe mit einem Balkenmodell.

Es werden zunächst die Anforderungen an den Überrollkäfig betrachtet und ein Konzept zur Ausführung mit Hybrid-Rohren vorgestellt. Für die Berechnung der Schnittkraftverläufe werden verschiedene Verfahren wie das Übertragungsmatrizen- oder das Deformationsverfahren beschrieben und diese in einem MATLAB-Skript umgesetzt und mit einer FE-Lösung verglichen.

Die Festigkeitsbewertung der Rohre erfolgt an definierten Schnittebenen. In diesen Ebenen wird der Rohrquerschnitt in Kreisringsegmente geteilt und für diese werden mittels der klassischen Laminattheorie die Versagenskriterien berechnet. Die Auswirkung des Versagens einzelner Segmente auf das globale Verhalten wird iterativ berücksichtigt.

Die Auslegung der Topologie erfolgt über A-B-Vergleiche und Interpretation der Verschiebungen. Das Simulationsmodell auf Basis von Balkenelementen wird mit einem Python-Skript automatisiert in ABAQUS erstellt. Durch die Implementierung zusätzlicher Knotensteifigkeiten können Knotenverstärkungen bereits bei der Auslegung berücksichtigt werden.

Abstract

This thesis studies the approximatively design of structural systems consisting of metal/fibre-reinforced plastic hybrid tubes as roll cages. Besides the design of hybrid tubes, the topology, i.e. the layout of the tubes, is considered. The method is based on the computation of the displacement and strain distribution using beam theory.

At first, the requirements on a roll cage are evaluated and the design of a roll cage with hybrid tubes is presented. For the computation of strain distributions, the transfer matrix method and deformation method are explained. Both methods are calculated in MATLAB and compared to a finite element solution.

The strength of tubes is evaluated at defined cross-sections. At these sections, the tube cross-section is separated into annulus sector and by using classical laminate theory failure critiera are calculated. The impact of failure in single annulus sector on the global behaviour of the whole structure is evaluated iteratively.

The design of the topology is done by A-B comparisons and interpretation of displacements. The creation of the simulation model consisting of beam elements is automatised via Python scripts in ABAQUS. By integrating additional joint stiffness in the design phase, joint reinforcements can be achieved.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung: Motivation und Problemstellung	16
2	Grundlagen	17
2.1	Stand der Forschung: Literaturüberblick	17
2.2	Aufgaben und Aufbau eines gewöhnlichen Überrollkäfigs	21
2.2.1	Zulassung für den Einsatz im Rennbetrieb	21
2.2.2	Anforderungen an den Überrollkäfig	23
2.3	Konzept eines Überrollkäfigs basierend auf Metall-Faserverbund-Rohren . .	26
2.3.1	Metall-Faserverbundkunststoff-Rohr	27
2.3.2	Konstruktive Ausführung	27
2.3.3	Komponenten und Einbau	30
3	Theorie des Übertragungsmatrizenverfahrens	32
3.1	Theorie des Übertragungsmatrizenverfahrens bei unverzweigten Tragwerken	32
3.1.1	Definition der Schnitt- und Deformationsgrößen im lokalen KOS . .	33
3.1.2	Definition häufig verwendeter Begriffe	34
3.1.3	Feldmatrix	36
3.1.4	Punktmatrix	41
3.2	Theorie des Übertragungsmatrizenverfahrens bei verzweigten Tragwerken .	46
3.2.1	Modellierung der Verzweigung als dreh- und dehnbare Feder	46
3.2.2	Berechnung von verzweigten Tragwerken mit dem Übertragungsma- trizenverfahren	50
3.3	Theorie des Deformationsverfahrens bei verzweigten Tragwerken	52
3.3.1	Diskretisierung	52
3.3.2	Elementbeziehungen	53
3.3.3	Knotengleichgewichtsbedingungen	54
3.3.4	Steifigkeitsmatrizen und Randschnittkräfte	55
3.4	Kombiniertes Verfahren	56
3.5	Vergleich der vorgestellten Verfahren	58
4	Modellierung eines Balkentragwerkes mit dem Übertragungsmatrizenverfahren	59
4.1	Allgemeiner Ablauf der Berechnungsverfahren	60
4.2	Umsetzung der Algorithmen	63

4.3	Berechnung ausgewählter Lastfälle	64
4.3.1	Berechnung des Grundtragwerkes mit dem Übertragungsmatrizenverfahren	66
4.3.2	Berechnung des Grundtragwerkes mit dem Deformationsverfahrens	68
4.3.3	Berechnung des erweiterten Tragwerkes mit dem Deformationsverfahrens	70
4.3.4	Berechnung eines Tragwerkes mit dem kombinierten Verfahren	72
4.3.5	Auswertung und Vergleich mit einer FEM-Lösung	77
4.3.6	Anwendung des Übertragungsmatrizenverfahrens zur Berechnung der Schnittkraftverläufe	81
4.4	Teilfazit	84
5	Vereinfachte Festigkeitsbewertung geschichteter Rohre unter verallgemeinerter Belastung	85
5.1	Ausgewählter Lastfall	87
5.2	Spannungsverteilung bei verallgemeinerter Belastung	90
5.3	Diskretisierung des Rohrquerschnitts	92
5.3.1	Bestimmung des Flächenträgheitsmomentes	93
5.3.2	Bestimmung der Steifigkeiten der Einzelschicht	95
5.3.3	Bestimmung der Steifigkeiten des Laminates	97
5.4	Aufteilung der Schnittkräfte und -momente auf die diskretisierten Keisringelemente	100
5.4.1	Aufteilung der Schnittkräfte	101
5.4.2	Berechnung der Spannungen und Dehnungen	103
5.5	Elementweise Versagensbewertung	103
5.5.1	Schädigungsbeginn	103
5.5.2	Schädigungsentwicklung	104
5.6	Übertragung von Elementschädigungen auf das globale Strukturverhalten	107
5.7	Verfahren zur iterativen „Optimierung“ des Lagenaufbaus	112
6	Automatisierte Simulation von Balkentragwerken und Implementierung von Knotensteifigkeiten	113
6.1	Anwendungsfall und Zielsetzung	113
6.2	Auswahl FE-Software	114
6.3	Umsetzung in ABAQUS	114
6.3.1	Programmstruktur	114
6.3.2	Modellerstellung	116
6.4	Fallstudien	120
6.4.1	Vergleich Verstrebung Tür Beifahrerseite	123
6.4.2	Vergleich Verstrebung Dach und Stütze C-Säule	126
6.4.3	Auswahl Geometrie	129
6.4.4	Weiterführung	130
6.5	Implementierung zusätzlicher Knotensteifigkeit	131
6.5.1	Programmtechnische Umsetzung	131
6.5.2	Ermittlung der Knotensteifigkeiten	136
6.5.3	Anwendung	139
7	Zusammenfassung und Ausblick	144

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

A	[mm ²]	Rohrquerschnittsfläche
A_i	[mm ²]	Kreisringsegmentsfläche in Lage i
A_k	[mm ²]	Querschnittsfläche im Feld k
A_{ij}	[N/mm]	Komponente ij der Scheibensteifigkeitsmatrix \mathbf{A}
$A_{ij,k,l}$	[N/mm]	Partialsteifigkeitskomponente ij im Kreisringsegment k, l
\mathbf{A}	[N/mm]	Scheibensteifigkeit
$\mathbf{A}_{D,k,l}$	[N/mm]	geschädigte Scheibensteifigkeit im Kreisringsegment k, l
b	[mm]	Laminatbreite
b	[mm]	Abstand der Radaufstandspunkte in y -Richtung
\hat{b}_l	[mm]	Kreisbogenlänge des Kreisringsegmentes in Lage l
\hat{b}_{Ring}	[mm]	Umfang der Einzelschicht
c	$\left[\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}\right]$	Torsionssteifigkeit des Überrollkäfiges
C	[MPa]	Gesamtsteifigkeit
C_k	[MPa]	Partialsteifigkeit
C_1-C_4	[-]	Integrationskonstanten
d_f	[-]	Schädigungsparameter für Faserschädigung
d_m	[-]	Schädigungsparameter für Matrixschädigung
d_s	[-]	Schädigungsparameter für Schubschädigung
E	[MPa]	isotroper E-Modul
E_1	[MPa]	Laminat-E-Modul parallel zur Faser

E_2	[MPa]	Laminat-E-Modul quer zur Faser
E_k	[MPa]	E-Modul im Feld k
E_x	[MPa]	Ingenieur-Steifigkeit in x -Richtung
E_y	[MPa]	Ingenieur-Steifigkeit in y -Richtung
f_n	[-]	Funktionswerte der Versagenskriterien
f_{zul}	[-]	zulässiger Wert der Versagenskriterien
$f_{1,k,l}-f_{4,k,l}$	[-]	Funktionswerte der Versagenskriterien im Kreisringsegment k, l
F	[N]	Prüfkraft für Zertifizierungs-Versuche
F_N	[N]	Normalkraft
$F_{N,0}$	[N]	Freigröße Normalkraft
$F_{N,k,I}$	[N]	Belastungsgröße in Feldmatrix im Feld k
$F_{N,i}^k$	[N]	Knotenkraft im Lager i
$F_{N,i}^{k0}$	[N]	Belastungsgröße in Punktmatrix an Unstetigkeitsstelle i
F_Q	[N]	Querkraft
$F_{Q,0}$	[N]	Freigröße Querkraft
$F_{Q,y}$	[N]	Querkraft in y -Richtung
$F_{Q,z}$	[N]	Querkraft in z -Richtung
$F_{Q,k,0}$	[N]	Wert am Schnittufer bei $x_k = 0$
$F_{Q,k,I}$	[N]	Belastungsgröße in Feldmatrix im Feld k
$F_{Q,i}^k$	[N]	Knotenkraft im Lager i
$F_{Q,i}^s$	[N]	Sprunggröße am Lager i
$F_{Q,i}^{k0}$	[N]	Belastungsgröße in Punktmatrix an Unstetigkeitsstelle i
$F_{z,VL}$	[N]	Kraft an Randaufstandspunkt; vorne links
$F_{z,VR}$	[N]	Kraft an Randaufstandspunkt; vorne rechts
\mathbf{F}	[-]	Feldmatrix
\mathbf{F}_0	[N]	Randschnittkräftevektor an frei beweglichen Knoten
\mathbf{F}_k	[-]	Feldmatrix für allgemeine Belastung für das Feld k
\mathbf{F}_k	[N]	Zusammengefasste Randschnittkräftevektoren des Balken k
\mathbf{F}^{xz}	[N]	Randschnittkräftevektor (RKV) im globalen KOS
$\mathbf{F}_{0,k}$	[N]	Zusammengefasste RKV bei kinematisch bestimmter Lagerung

$F_{k,0}$	[N]	Kräfte am Balken k am linken Rand
$F_{k,1}$	[N]	Kräfte am Balken k am rechten Rand
F_0^{xz}	[N]	RKV bei kinematisch bestimmter Lagerung im globalen KOS
$F_{k,B}$	[-]	Feldmatrix für Biegung für das Feld k
$F_{k,N}$	[-]	Feldmatrix für Längsverschiebung für das Feld k
$F_{k,T}$	[-]	Feldmatrix für Torsionsbeanspruchung für das Feld k
G	$\left[\frac{\text{kJ}}{\text{mm}^2} \right]$	Bruchenergie
G	[MPa]	Schubmodul
G_{12}, G_{23}	[MPa]	Laminat-G-Modul
G_{xy}	[MPa]	Ingenieur-Schubmodul in der xy -Ebene
i	[-]	Index Lager/Unsteigkeitsstelle
i	[-]	Index Einzelschicht in Faserverbundummantelung
ij	[-]	Index Kreisringsegment
I	$[\text{mm}^4]$	Flächenträgheitsmoment
I_k	$[\text{mm}^4]$	Flächenträgheitsmoment im Feld k
I_T	$[\text{mm}^4]$	Torsionsträgheitsmoment
I_y	$[\text{mm}^4]$	Flächenträgheitsmoment in y -Richtung
I_z	$[\text{mm}^4]$	Flächenträgheitsmoment in z -Richtung
I_{xz}	$[\text{mm}^4]$	deviatorische Flächenträgheitsmoment
$I_{y,p,ij}$	$[\text{mm}^4]$	Flächenträgheitsmomente der Partialfläche
$I_{z,p,ij}$	$[\text{mm}^4]$	Flächenträgheitsmomente der Partialfläche
$I_{yz,p,i}$	$[\text{mm}^4]$	deviatorische Flächenträgheitsmomente der Partialfläche
k	[-]	Feldindex des Tragwerkabschnittes
k	[-]	Index Einzelschicht in Faserverbundummantelung
k_k	[-]	Wichtung der Partialkräfte/Partialspannungen
$k_{u,i}$	[N/m]	Federsteifigkeit gegen Längsverschiebung am Lager i
$k_{w,i}$	[N/m]	Federsteifigkeit gegen Durchsenkung am Lager i
$k_{\varphi,i}$	[Nm]	Drehsteifigkeit am Lager i
$k_{N,k,l}$	[-]	Wichtung der Normalkräfte

$k_{S,k,l}$	[-]	Wichtung für Schubbeanspruchung
\mathbf{K}	[MPa]	Systemsteifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_e	[MPa]	Elementsteifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_m	[MPa]	Elementsteifigkeitsmatrix Makroelement
\mathbf{K}^*	[-]	Federmatrix
\mathbf{K}^{xz}	[MPa]	Systemsteifigkeitsmatrix im globalen KOS
$\mathbf{K}_{k,n,m}$	[MPa]	Steifigkeitssubmatrizen
l	[mm]	Länge
l	[-]	Index Kreisringsegment in Faserverbundummantelung
l_k	[mm]	Länge des Feldes k
L_c	[mm]	charakteristischen Länge
m	[-]	Anzahl der Lagen/Ringe
M	[Nm]	Moment
M_0	[Nm]	Freigröße Moment
M_T	[Nm]	Torsionsmoment
M_x	[Nm]	Moment um die x -Achse
M_y	[Nm]	Moment um die y -Achse
M_z	[Nm]	Moment um die z -Achse
M_i^k	[Nm]	Knotenmoment im Lager i
M_i^s	[Nm]	Sprunggröße am Lager i
$M_{k,0}$	[Nm]	Wert am Schnittufer bei $x_k = 0$
$M_{k,I}$	[Nm]	Belastungsgröße in Feldmatrix im Feld k
M_i^{k0}	[Nm]	Belastungsgröße in Punktmatrix an Unstetigkeitsstelle i
$M_{x,k}$	[Nm]	Torsionsmoment im Feld k
$M_{x,k,I}$	[Nm]	Belastungsgröße in Feldmatrix im Feld k
\mathbf{M}	[-]	Schädigungsoperator
n	[-]	Elementen pro Lage/Ring
n_x, n_y	[N/mm]	Schnitt-Normalkraftfluss im xy -KOS
n_{xy}	[N/mm]	Schnitt-Schubfluss im xy -KOS
$n_{x,k}, n_{y,k}$	[N/mm]	Schnitt-Normalkraftfluss in Schicht k im xy -KOS

$n_{xy,k}$	[N/mm]	Schnitt-Schubfluss in Schicht k im xy -KOS
$n_{x,k,l}$	[N/mm]	Partial-Normalkraftfluss für die Kreisringsegmente
$n_{xy,k,l}$	[N/mm]	Partial-Schnitt-Schubfluss für die Kreisringsegmente
\mathbf{n}	[N/mm]	Linienkräfte
N_x, N_y	[N]	Schnitt-Normalkräfte
N_{xy}	[N]	Schnitt-Schubkraft
\mathbf{N}	[N]	Schnittkräftevektor
p	[N/m]	Längsbelastungsfunktion in x -Richtung
\mathbf{P}^{xz}	[N]	Äußere Kräfte auf frei bewegliche Knoten
$\mathbf{P}_{b,i}$	[-]	Punktmatrix für Biegung
$\mathbf{P}_{n,i}$	[-]	Punktmatrix für Längsverschiebung
$\mathbf{P}_{S,i}$	[-]	Punktmatrix zum Anfedern von vertikalen Stützen
$\mathbf{P}_{S,i}^{xz}$	[-]	Punktmatrix zum Anfedern von Stützen im globalen KOS
q	[N/m]	Querbelastungsfunktion
q_k	[N/m]	Querlast im Feld k
q_y	[N/m]	Querbelastungsfunktion in y -Richtung
q_z	[N/m]	Querbelastungsfunktion in z -Richtung
$Q_{ij,k}$	[MPa]	Komponente der reduzierten Steifigkeit der Einzelschicht im 12-KOS
$\bar{Q}_{ij,k}$	[MPa]	Komponente der reduzierten Steifigkeit der Einzelschicht im xy -KOS
\mathbf{Q}	[MPa]	transformierte reduzierte Steifigkeit der Einzelschicht im 12-KOS
$\bar{\mathbf{Q}}$	[MPa]	reduzierte Steifigkeit der Einzelschicht im xy -KOS
\mathbf{Q}_k	[MPa]	reduzierte Schichtsteifigkeit
\mathbf{Q}_D	[MPa]	reduzierte Steifigkeitsmatrix mit Berücksichtigung der Schädigung
$\bar{\mathbf{Q}}_{D,k,l}$	[MPa]	geschädigte Steifigkeiten der Kreisringsegmente
r_m	[mm]	mittlerer Radius
R_i	[mm]	Außenradius
$R_{p0,2}$	[MPa]	Dehngrenze
s	[-]	Index zur Kennzeichnung der Sprungrößen
S_L, S_Q	[MPa]	Schubfestigkeit in Faserlängs- und Faserquerrichtung
\mathbf{S}	[MPa ⁻¹]	Nachgiebigkeitsmatrix

\mathbf{S}_D	[MPa ⁻¹]	Nachgiebigkeitsmatrix mit berücksichtigter Schädigung
t	[N]	Torsionsbelastungsfunktion in x -Richtung
t	[mm]	Wandstärke Rohr/Laminatdicke
t_i	[mm]	Wandstärke Kreisringsegment in Lage i
t_k	[mm]	Dicke der Einzelschicht k
\mathbf{T}	[-]	Transformationsmatrix
$\mathbf{T}_{\sigma_{12} \rightarrow xy}$	[-]	Spannungstransformation vom 12-KOS in das xy -KOS
$\mathbf{T}_{\varepsilon_{xy} \rightarrow 12}$	[-]	Verzerrungstransformation vom xy -KOS in das 12-KOS
u	[mm]	Verschiebung in x -Richtung
u_i^k	[mm]	Knotenverschiebung am Lager i
$u_{k,I}$	[mm]	Belastungsgröße in Feldmatrix im Feld k
\mathbf{u}	[mm]	Verschiebungsvektor
\mathbf{u}^{xz}	[mm]	Verschiebungsvektor im globalen xy -KOS
$\mathbf{u}_{k,0}$	[mm]	Verschiebungsvektor im Feld k bei $x_k = 0$
$\mathbf{u}_{k,1}$	[mm]	Verschiebungsvektor im Feld k bei $x_k = l_k$
\mathbf{U}	[-]	Produktmatrix
v	[mm]	Verschiebung in y -Richtung
w	[kg]	Bemessungsgröße für FIA-Versuche
w	[mm]	Verschiebung in z -Richtung
w_0	[mm]	Freigröße Verschiebung in z -Richtung
w_i	[mm]	Weg am Lager i
w_i^k	[mm]	vertikale Verschiebung am Lager i
$w_{k,0}$	[mm]	Durchsenkung am Schnittufer bei $x_k = 0$
$w_{k,I}$	[mm]	Belastungsgröße in Feldmatrix im Feld k
w_{el}	[mm]	elastische Durchsenkung
$w_{Ge,l}$	[mm]	Gesamtdurchsenkung mit reduzierter Gelenksteifigkeit
$w_{Ge,h}$	[mm]	Gesamtdurchsenkung mit erhöhter Gelenksteifigkeit
$w_{z,VL}$	[mm]	Verschiebungen an Randaufstandspunkt; vorne links
$w_{z,VR}$	[mm]	Verschiebungen an Randaufstandspunkt; vorne rechts
X_t, X_c	[MPa]	Zug- und Druckfestigkeiten in Faserrichtung

$y_{c,i}$	[mm]	Abstand des Flächenschwerpunkt von Innenradius
$y_{s,ij}$	[mm]	Abständ zum Flächenschwerpunkt des Kreisringsegmentes
Y_t, Y_c	[MPa]	Zug- und Druckfestigkeiten in Querrichtung
$z_{s,ij}$	[mm]	Abständ zum Flächenschwerpunkt des Kreisringsegmentes
z_0	[-]	Zustandsvektor am linken Rand
z_1	[-]	Zustandsvektor am rechten Rand
$z_{k,0}$	[-]	Zustandsvektor am linken Rand des Feldes k
$z_{k,1}$	[-]	Zustandsvektor am rechten Rand des Feldes k

Griechische Symbole

α	[°]	Winkel zwischen 12-KOS gegenüber dem globalen xy -KOS
γ_{xy}	[-]	Schiebung in der xy -Ebene
$\gamma_{xy,k}$	[-]	Schiebung in Schicht k in xy -Ebene
δ	[°]	halber Öffnungswinkel des Kreisringsegmentes
δ_{eq}^0	[-]	Vergleichsdehnung bei Schädigungsbeginn
δ_{eq}	[-]	Vergleichsdehnungen
δ_{eq}^f	[-]	Vergleichsdehnung bei Versagen
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	[-]	Dehnungen im Laminat
$\varepsilon_{x,k}, \varepsilon_{y,k}$	[-]	Dehnungen in Schicht k
ε	[-]	Verzerrungstensor in voigtscher Notation
ε_{xy}	[-]	Verzerrungstensor in voigtscher Notation im xy -KOS
$\varepsilon_{k,12}$	[-]	Schichtverzerrungen in Lage k im 12-KOS
ϑ	[-]	Drehwinkel um die x -Achse
ϑ_k	[-]	Drehwinkel um die x -Achse im Feld k
$\vartheta_{k,I}$	[-]	Belastungsgröße in Feldmatrix im Feld k
ν_{xy}, ν_{yx}	[-]	Ingenieur Querkontraktion in der xy -Ebene
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6$	[MPa]	Spannungskomponenten im 12-KOS
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	[MPa]	Spannungskomponenten im xy -KOS
$\bar{\sigma}$	[MPa]	ideelle Normalspannung
σ_k	[MPa]	tatsächlichen Spannung in Schicht k

$\sigma_{p,k}$	[MPa]	Partialspannung in Schicht k
σ_V	[MPa]	Vergleichsspannung
$\sigma_{x,k}$	[MPa]	Spannungskomponenten in Schicht k im xy -KOS
$\sigma_{y,k}$	[MPa]	Spannungskomponenten in Schicht k im xy -KOS
$\sigma_{xy,k}$	[MPa]	Spannungskomponenten in Schicht k im xy -KOS
σ_{zul}	[MPa]	zulässige Spannung
σ_{eq}^0	[MPa]	Vergleichsspannung bei Schädigungsbeginn
$\sigma_{V,max}$	[MPa]	höchste auftretende Vergleichsspannung
$\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$	[MPa]	Ersatzspannungen zur Berechnung des Schädigungsbeginns
σ	[MPa]	Spannungstensor in voigtscher Notation
σ	[MPa]	nomineller Spannungstensor in voigtscher Notation
$\hat{\sigma}$	[MPa]	Ersatzspannungstensor in voigtscher Notation
σ_{12}	[MPa]	Spannungstensor in voigtscher Notation im 12-Koordinatensystem
$\bar{\tau}$	[MPa]	ideelle Schubspannung
$\bar{\tau}(\alpha)$	[MPa]	Schubspannungsverteilung in Abhängigkeit von α
τ_{xy}	[MPa]	Schubspannung im xy -KOS
$\hat{\tau}_{12}$	[MPa]	Ersatzschubspannung zur Berechnung des Schädigungsbeginns
φ	[-]	Verdrehung um die y -Achse
φ_0	[-]	Freigröße - Verdrehung um die y -Achse
φ_i	[-]	Drehwinkel am Lager i
φ_i^k	[-]	Knotenverschiebung am Lager i
φ_i^s	[-]	Sprunggröße am Lager i
$\varphi_{k,0}$	[-]	Drehwinkel am Schnittufer bei $x_k = 0$
$\varphi_{k,I}$	[-]	Belastungsgröße in Feldmatrix im Feld k
ψ	[-]	Drehwinkel um die z -Achse

Kapitel 1

Einführung: Motivation und Problemstellung

Erprobungen in der Automobilentwicklung finden am Prüfstand, im Straßenverkehr sowie auf abgesperrten Strecken statt [91]. Insbesondere Erprobungen auf Rennstrecken und im Rennbetrieb stellen eine kosten- und zeiteffiziente Variante dar, da die Beanspruchung des Fahrzeuges deutlich höher ist und dieses somit im Zeitraffer geprüft werden kann. Die Rennbedingungen stellen hierbei hohe Anforderungen an den Fahrer sowie das Fahrzeug dar, sodass Unfälle, bedingt durch menschliches oder technisches Versagen mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit eintreten werden. Deshalb muss die Sicherheit des Fahrers unter allen Umständen gewährleistet sein. Hierfür sind verschiedene passive Sicherheitssysteme integriert. Neben den direkt am Körper getragenen Schutzvorrichtungen (Helm, Overall, Schuhe und Handschuhe) und den unmittelbar den Fahrer betreffenden Schutzvorrichtungen (H.A.N.S., Schalensitze, 6-Punkt-Gurte), sind am Fahrzeug weitere Schutzvorrichtungen angebracht, wie etwa der Überrollkäfig.

Zur Verbesserung der Festigkeit und Steifigkeit bzw. Erhaltung dieser bei reduziertem Gewicht sollen die üblicherweise aus Stahl bestehenden Rohre des Überrollkäfigs durch Hybrid-Metall-Faserverbund-Rohre substituiert werden. Während bei gebräuchlichen Stahlrohren der Querschnitt nur Rohrweise gewählt werden kann und dies dann nur im Rahmen einiger weniger Abmessungen, ist bei Hybrid-Rohren eine abschnittsweise Anpassung des Lagenaufbaus in feineren Stufen denkbar. Durch die Erhöhung der Designfreiheitsgrade wird jedoch auch die Suche nach der optimalen Auslegung erschwert. Zusätzlich zu den Eigenschaften der Einzelrohre wird die Steifigkeit/Festigkeit des Überrollkäfigs auch durch die Anordnung der Rohre im Tragwerk maßgeblich beeinflusst.

Eine unzureichende Auslegung, welche das Leichtbaupotential nur geringfügig ausschöpft, steht nicht im Verhältnis zum hohen Entwicklungsaufwand eines Überrollkäfigs mit Hybridrohren. In dieser Arbeit soll somit ein Verfahren zur näherungsweisen Auslegung von Tragwerken aus Hybrid-Metall-Faserverbund-Rohre entwickelt werden.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Stand der Forschung: Literaturüberblick

Zunächst soll die wichtigste Literatur im Bereich des Leichtbaus und der Faserverbundwerkstoffe aufgeführt werden, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendet wird. Eine anwendungsorientierte Betrachtung der Verbundwerkstoffe, angefangen mit der Werkstoffkunde über die Berechnung mittels der klassischen Laminattheorie bis zum Festigkeitsnachweis und Konstruktionsrichtlinien ist bei Bergmann [12], Schürmann [98] und Jones [57] zu finden. Mit der Werkstoffkunde der Fasern, Matrices und Lamine sowie deren Berechnung und Auslegung beschäftigen sich Barbero [10] und Berthelot [13]. Während sich die Autoren Czerwenka und Schnell [21, 22], Dieker und Reimerdes [25] und Kossira [62] mit der analytischen Auslegung von Leichtbaustrukturen beschäftigen, betrachten Wiedemann [123] und Klein [61] zusätzlich die konstruktive Ausführung. Eine besonders ausführliche Beschreibung der klassischen Laminattheorie als auch höherer Theorien wie z. B. zur Berechnung von Sandwichstrukturen ist bei Altenbach, Altenbach und Rikards [4], Altenbach, Altenbach und Kissing [3] und Reddy [89] zu finden. Während sich Stellbrink [107] mit der Mikromechanik in Hinblick auf die Berechnung der Laminatkennwerte zur praktischen Anwendung beschäftigt, verfolgt Dvorak [29] die theoretische Beschreibung der Mikromechanik der Faserverbundwerkstoffe. Bei Flemming, Ziegmann und Roth [41, 43] und Ehrenstein [30] erfolgt eine technologische Betrachtung der Verbundwerkstoffe. Zum Einen werden die verschiedenen Matrix- und Faserwerkstoffe und deren Eigenschaften und zum Anderen die Herstellverfahren der Faserverbund-Halbzeuge und -Bauteile beschrieben. Überwiegend mit der Fertigung von Faserverbundkunststoff-Bauteilen beschäftigen sich Flemming, Ziegmann und Roth [42], Neitzel, Mitschang und Breuer [79] und Lengsfeld u. a. [69]. Beim Versagen von Bauteilen aus Verbundwerkstoffen wird hauptsächlich zwischen Versagen durch Schadens- und Bruchmechanik sowie Ermüdungsversagen durch zyklische Beanspruchung unterschieden. Während sich Harris [53] und Vassilopoulos und Keller [118] überwiegend mit der Ermüdung (Fatigue) und der Lebensdauervoraussage beschäftigen, findet sich bei Reifsnider [90], Talreja [109, 110] und Talreja und Singh [111] zusätzlich die Beschreibung der Schädigung (Damage). Mit dem Versagen durch dynamische Beanspruchungen wie etwa Impaktlasten auf monolithische oder Sandwichstrukturen beschäftigen sich Abrate, Castanie und Rajapakse [1] und Silberschmidt [103]. Friedrich [44] beschreibt den Einsatz von Faserverbundbauteilen im Automobilbau während Gay [47] unter anderem die Verwendung von Verbundwerkstoff in der Luftfahrt betrachtet. Die Autoren Ochoa und Reddy [80] und Barbero [8, 9] beschreiben die Modellierung und Berechnung der Lamine mittels der FEM, letzterer insbesondere mit der Software ABAQUS.

Die Berechnung der Schnittgrößen soll mit Hilfe des Übertragungsmatrizen- bzw. des Deformationsverfahrens erfolgen. Im Folgenden sollen ausgewählte Veröffentlichungen zu den Verfahren aufgeführt werden. Nach Graf und Vassilev [48] geht die Entwicklung des Deformationsverfahrens auf die Autoren Osterfeld [81], Mann [73] und Beyer [15] zurück, während nach Graf und Vassilev [48] und Gasch, Knothe und Liebich [45] die Ursprünge des zeitgleich entwickelten Übertragungsmatrizenverfahrens beim Autor Holzer [56] liegen, welcher das Verfahren zur Berechnung von Drehschwingungen verwendet hat. Erste Veröffentlichungen zur Berechnung von Balkentragwerken mit dem Übertragungsmatrizenverfahren finden sich bei Falk mit der Berechnung eines mehrfeldrigen geraden Balkens [32], der Berechnung von Durchlaufträgern [35], der Berechnung von offenen [37] und geschlossenen Rahmentragwerken [36]. Die Berechnung der Torsion eines Kastenprofils mittels des Übertragungsmatrizenverfahrens findet sich bei Pestel [82], während Schumpich und Spierig [97] das Verfahren zur Berechnung von räumlichen Balkentragwerken verwenden. Eine Berechnung von geschichteten Balken findet sich bei Bufler [18]. Der Vergleich des Übertragungsmatrizenverfahrens mit weiteren Berechnungsverfahren wird bei Uhrig [116] durchgeführt. Falk [33, 34] beschreibt weiterhin eine Variante des Reduktionsverfahrens, welche ohne Übertragungsmatrizen durchgeführt werden kann. Es wird gezeigt, dass diese Methode die numerische Stabilität verbessert und den Rechenaufwand reduziert, welcher nach heutigen Maßstäben jedoch nicht mehr von Bedeutung ist. Die Anwendung auf dynamische Probleme ist bei Zurmühl [130] mit der Berechnung von Biegeschwingungen oder bei Hasselgruber [55] mit der Berechnung von erzwungenen, gedämpften Drehschwingungen zu finden. Pestel und Mahrenholtz [83] beschreiben die Bestimmung der Eigenfrequenzen mittels Übertragungsmatrizen. Eine Betrachtung der Kopplung von Transversal- und Drillschwingungen bei Balken mit offenen Profilen ist bei Schrader [96] zu finden. Abseits von Balkentragwerken wird das Übertragungsmatrizenverfahren ebenfalls zur Berechnung weiterer Leichtbaustrukturen verwendet, etwa zur Ermittlung der Beultraglasten ausgesteifter Schalen bei Shigematsu, Ohga und Hara [99] oder zur Berechnung von Rotationsschalen bei Wunderlich [124]. Neuere Veröffentlichungen finden sich bei Habr [50], welcher das Übertragungsmatrizenverfahren zur Abbildung von hydraulischen Systemen im Frequenzbereich verwendet sowie bei Thoma [112], der das Verfahren zur Berechnung von Getriebewellen mit abschnittsweise konstanten Durchmessern anwendet.

Um Verbesserungen im Leichtbau zu erzielen, sollen für den Überrollkäfig Hybridrohre mit metallischem Liner und Faserverbundkunststoffummantelung zum Einsatz kommen. Zunächst sollen Veröffentlichungen, die die Hybrid-Laminate behandeln, aufgeführt werden. Bei Vermeeren [119] und Sinmazçelik u. a. [104] findet sich ein Überblick zu den Faser-Metall-Laminaten. Neben dem zeitlichen Ablauf der Entwicklung der Faser-Metall-Laminate werden gebräuchliche Materialkombinationen, Eigenschaften, Herstellung und Einsatzgebiete beschrieben. Die Autoren Yamaguchi, Okabe und Yashiro [126] betrachten die Ermüdung von Titan/CFK-Hybrid-Laminaten. Für die numerische Analyse wird ein FE-Modell mit Schalen- und Kohesivelementen aufgebaut. Für die Kohesivelemente wird ein energiebasiertes Schädigungsmodell verwendet, wobei die Energiefreisetzungsrate mittels der Virtual Crack Closure Technique (VCCT) berechnet wird. Bei Shin, Kim und Lee [100] wird das Schädigungsverhalten eines Aluminium/CFK-Hybrid-Balkens unter Drei-Punkt-Biegung numerisch untersucht. Der mittels Schalen- und Kohesivelementen modellierte Balken wird in ABAQUS berechnet. Der Schädigungsbeginn des energiebasierten Schädigungsmodells wird mit dem Hashin-Kriterium bestimmt. Es wird eine gute Übereinstimmung der Versuchs- und Simulationsergebnisse beschrieben. Die Modellierung der bei Chen, Morozov und Shankar [19] betrachteten Lochscheibe erfolgt ebenfalls

in ABAQUS mit dem zuvor beschriebenen Hybridmaterial, den Elementtypen und dem Schädigungsmodell. Es wird der Einfluss der Anzahl der Löcher und des Lagenaufbaus auf die Spannungsverteilung und das Schädigungsverhalten diskutiert. Die Autoren Lauter, Frantz und Kohler [66] und Lauter u. a. [67] betrachten eine lokale Verstärkung eines metallischen Hohlprofils mit einem Faserverbundwerkstoff. Zunächst werden das Herstellungsverfahren und der Prüfstands Aufbau für axiale und transversale Crash-Versuche beschrieben. Es werden für beide Lastfälle Verbesserung bei den für Crash-Versuche relevanten Parametern wie Energieabsorption beschrieben. Bei Naghipour u. a. [77] und Lopes u. a. [72] ist eine Betrachtung der Festigkeit der Grenzschicht zwischen dem Metall und dem Verbundwerkstoff in Hybridlaminaten zu finden. Die Analyse erfolgt mittels Zugscherfestigkeitsversuchen bei einschnittig überlappten Klebungen, welche experimentell und numerisch in ABAQUS durchgeführt werden. Während Naghipour u. a. [77] einen Einfluss der Probengröße auf die Ergebnisse feststellen, beschreiben Lopes u. a. [72] eine in Abhängigkeit der vorhergehenden Oberflächenbehandlung der metallischen Schicht variierende Zugscherfestigkeit. Lauter [65] betrachtet die technologischen Eigenschaften von Hybrid-Metal-Faserverbundkunststoffen. Es wird neben der Herstellung der Halbzeuge ebenso die Fertigung sowie die Methodik zur Entwicklung von Hybrid-Bauteilen zur Anwendung im Automobilbau untersucht. Umfangreiche numerische und experimentelle Untersuchungen von Hybrid-Metal-Faserverbundkunststoffen im Bezug auf das Crashverhalten finden sich bei Mildner [75], während bei Both [17] die Betrachtung für quasistatische und zyklische Lasten stattfindet.

Bevor zur Literatur der Hybrid-Metal-Faserverbundrohre übergegangen wird, sollen ausgewählte Veröffentlichungen für CFK-Profile aufgeführt werden. Reuter, Sauerland und Tröster [92] beschreiben das Verhalten von runden CFK-Rohren unter axialer Crashbelastung. Die Berechnungen werden mit LS-Dyna durchgeführt, wobei die Kalibrierung der Materialparameter mittels Flachproben erfolgt. Es wird weiterhin eine gute Übereinstimmung der experimentellen und simulativen Ergebnisse berichtet. Die experimentelle Untersuchung eines Doppel-Hut-Profiles aus CFK findet sich bei Liu u. a. [71]. Es wird eine Abhängigkeit des Versagensmodus vom Lagenaufbau beobachtet. Bei Liu u. a. [70] wird eine Multi-Zellen-Anordnung von quadratischen Hohlprofilen aus Aluminium und CFK untersucht. Neben dem Einzelprofil wurde eine Anordnung von zwei sowie drei quadratischen Profilen getestet. Es wird eine Verbesserung der spezifischen Energieabsorption beschrieben, die je nach Material ihr Maximum bei zwei oder drei Zellen hat.

Die experimentelle Betrachtung des Crashverhaltens von Hybrid-Metal-Faserverbundkunststoffen findet sich bei Bambach, Elchalakani und Zhao [7], Liu u. a. [70], Zhu u. a. [128] und Boria, Scattina und Belingardi [16]. Die Autoren Bambach, Elchalakani und Zhao [7] betrachten quadratische Hohlprofile mit abgerundeten Kanten aus Stahl/CFK, wobei die Faserverbundlage außen liegt. Es wird eine Variation der Rohrabmessungen sowie des Lagenaufbaus durchgeführt, wobei immer eine Verbesserung der Crash relevanten Parameter beobachtet wird. Zhu u. a. [128] untersuchen kreisrunde Aluminium/CFK-Hybrid-Rohre, wobei die Position der metallischen Lage variiert wird: 1) Aluminiumschicht liegt innen; 2) Aluminiumschicht liegt außen; 3) Aluminiumschicht in Sandwichanordnung. Es werden bei der außen liegenden Aluminiumschicht die besten Crash relevanten Parameter beobachtet. Boria, Scattina und Belingardi [16] untersuchen Aluminium/Thermoplast-Hybrid-Rohre. Es wird ebenfalls eine höhere Energieabsorption im Vergleich zum Aluminiumrohr mit gleichem Querschnitt beobachtet. Die Autoren Dlugosch u. a. [26] beschreiben sowohl eine experimentelle als auch numerische Untersuchung des Crash-Verhaltens von rechteckigen Hohlprofilen. Das geschlossene Hohlprofil aus Faserverbundkunststoff wird

ein- oder beidseitig mit einer u-förmigen metallischen Lage beschichtet. Bei Bambach [6] ist die Betrachtung des Leichtbaupotentials bei der Verwendung von Hybrid-Metall-Faserverbundprofilen im Vorderwagen zu finden. Die numerische Untersuchung erfolgt mit LS-Dyna an zwei Fahrzeugen. Die mögliche Gewichtsersparnis wird mit 50 % - 66 % gegenüber Stahl bei Verwendung von Stahl/CFK-Hybrid-Profilen angegeben. Die Autoren Haedir u. a. [52] und Haedir und Zhao [51] beschäftigen sich mit der analytischen Berechnung von Hybridrohren. Während bei Haedir u. a. [52] die analytische Berechnung der Festigkeit von Stahl/CFK-Rundrohren zu finden ist, beschäftigen sich Haedir und Zhao [51] mit der Auslegung von Stahl/CFK-Rundprofilen in Abhängigkeit der Biegemomente.

Neben der Auslegung der Hybridrohre soll die Topologie des Überrollkäfigs, also die Anordnung der Einzelrohre optimiert werden. Dies soll über eine automatisierte Steuerung der CAE-Software erreicht werden. Hierfür sollen relevante Veröffentlichungen aufgeführt werden. Die Autoren Upreti, Erzgraeber und Fokylidis [117] beschreiben die Möglichkeit zur Automatisierung von Simulationen im Bereich Fußgängerschutz im Preprocessor ANSA durch eine Programmierung in Python. Für die Auswertung der Kraftverläufe, Steuerung der Lastaufbringung, Berechnung der Lebensdauervorhersage und die Erstellung von benutzerdefinierten Materialmodellen in ABAQUS wird bei Powers, Arnold und Baranski [87] eine Programmierung in Python verwendet. Gassara u. a. [46] beschreiben die Verwendung eines Python-Algorithmus zur Optimierung des Rückstellwinkels beim Biegeprozess. Die Autoren Zuo und Xie [129] beschreiben einen Python-Algorithmus zur Implementierung der Topologieoptimierung in ABAQUS.

Typische Überrollkäfige werden an den Knotenpunkten zusätzlich verstärkt, um die Steifigkeit bzw. Festigkeit zu erhöhen. Dies soll bereits in der Vorauslegung berücksichtigt werden. Im Folgenden sollen Veröffentlichungen vorgestellt werden, die die Knotenmodellierung in Balkentragwerken behandeln. Eine Fahrzeugkarosserie kann vereinfacht mit Balken- und Schalenelementen modelliert werden. Die Modellierung der Knoten bei den Balkenstruktur-Anteilen wird bei Moon, Lee und Park [76] beschrieben und eine Betrachtung der Knotensteifigkeiten sowie eine Parameterstudie mittels der Berechnung der Eigenfrequenzen durchgeführt. Die Autoren Stigliano u. a. [108] beschreiben die Substitution von mittels Schalenelementen modellierten Profilen und Verbindungselementen durch Balkenelemente und Knotensteifigkeiten, wodurch die Simulationszeiten reduziert werden können.

Die Aufgaben des Überrollkäfigs sind zum einen die Sicherstellung des Überlebensraumes des Fahrers sowie die Versteifung der Karosserie zur Verbesserung der Fahreigenschaften. Die Autoren Nassiopoulos und Njuguna [78] betrachten das Gesamtfahrzeugverhalten eines Rallyefahrzeuges bei einem Seitenaufprall. Hierzu wird der Pfahlaufpralltest an einem Fahrzeug mit einem Überrollkäfig simuliert. In Abhängigkeit der Wandstärke wird die Intrusion nur um 13,5 % - 19,7 % verringert, sodass eine zusätzliche Versteifung des Unterbodens empfohlen wird. Shojaeefard u. a. [101] beschreiben ein vereinfachtes Modell zur Berechnung der Torsionssteifigkeit der Karosserie mittels FEM. Während bei Coox u. a. [20] der Einfluss der Karosseriesteifigkeit auf das Fahrverhalten simuliert wird, beschreibt Siemens [102] den Prozess zur Zielgrößenfindung der Karosseriesteifigkeit.

2.2 Aufgaben und Aufbau eines gewöhnlichen Überrollkäfts

Die Aufgabe des Überrollkäfts teilt sich hauptsächlich in zwei Bereiche auf: Die zusätzliche Sicherheit für den Fahrer sowie die Versteifung der Karosserie.

Sicherheit für den Fahrer

Rennfahrzeuge lassen sich grob in die seriennäheren Touren-/Rallyfahrzeuge und reine Rennwagen wie Sportprototypen oder Formel-Fahrzeuge einteilen [113]. Sportprototypen und Formel-Fahrzeuge bestehen oftmals aus einem Carbon-Monocoque, welches bereits den notwendigen Schutz bei Überschlägen und sonstigen Crash-Situationen bietet.

Die betrachteten Touren- und Rallyefahrzeuge basieren auf Serienfahrzeugen, welche für Rennen umgebaut werden. Die Karosserie kann nur bedingt auf Rennanforderungen angepasst werden (Unfälle durch höhere Geschwindigkeiten, Auffahrunfälle mit hoher Geschwindigkeit, usw.), sodass der Überrollkäft als zusätzliches Element diese neuen Anforderungen ausgleichen muss/kann.

Der Überrollkäft bietet dem Fahrer zusätzlichen Schutz bei allen Arten von Unfällen, welche die Karosserie deformieren, z. B. bei Überschlag, Seitencrash durch ein anderes Fahrzeug oder einen Frontalcrash. Der Überrollkäft reduziert die Deformation der Karosserie auf ein tolerierbares Maß und wird hierbei entweder nicht deformiert, da die Energie beim Aufprall nicht ausreicht um den Käft zu plastifizieren, oder es wird durch die plastische Verformung der Überrollschutzvorrichtung zusätzliche Energie abgebaut, sodass der für den Fahrer notwendige Überlebensraum immer erhalten bleibt.

Erhöhung der Karosseriesteifigkeit

Die zweite Aufgabe der Überrollschutzvorrichtung ist die Erhöhung der Torsionssteifigkeit der Karosserie. Dies hat vor allem einen sportlichen Nutzen. Torsionsverformungen der Karosserie um die Längsachse führen zu Verlagerung der Radlasten, welche eine Veränderung des Fahrverhaltens zur Folge haben. Die Biegesteifigkeit der Karosserie spielt nur eine untergeordnete Rolle [113].

2.2.1 Zulassung für den Einsatz im Rennbetrieb

Die Verwendung des Überrollkäfts ist durch die zuständige ASN (franz.: Autorité Sportive Nationale, Träger der nationalen Sporthoheit, in Deutschland: DMSB [91]) reglementiert. Hierbei kann der Überrollkäft auf zwei verschiedene Wege für die Anwendung im Rennwagen zugelassen werden (siehe Abb. 2.1).

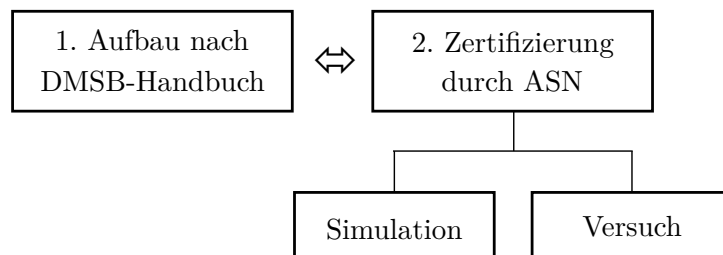


Abbildung 2.1: Zulassung des Überrollkäfts für den Einsatz im Rennbetrieb

2. Grundlagen

Für den ersten Fall finden sich im DMSB-Handbuch einige Konstruktionsbeispiele für die Geometrie (Abb. 2.2 und 2.3) sowie für die Auswahl der Rohre (siehe Tabelle 2.1).

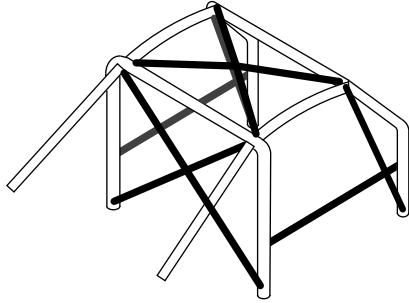


Abbildung 2.2: Mindestausführung mit Beifahrer (vgl. [27])

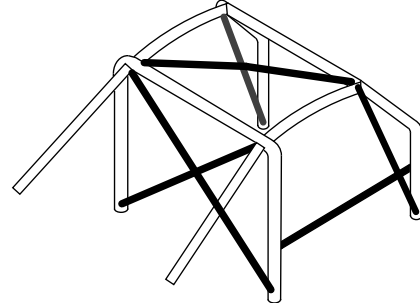


Abbildung 2.3: Mindestausführung ohne Beifahrer (vgl. [27])

Tabelle 2.1: Materialvorschriften für den Bau eines Überrollkäfigs nach dem DMSB-Handbuch (vgl. DMSB [27] und FIA Technical Department [38])

Mindestqualität	Mindestzugfestigkeit [MPa]	Mindestmaße [mm]	Benutzung
Nahtloser, kaltverformter, unlegierter Kohlenstoffstahl mit maximal 0,3 % Kohlenstoffgehalt	350	45 × 2,5 oder 50 × 2,0	Hauptbügel oder seitliche Bügel sowie deren hintere Querverbindung
	350	38 × 2,5 oder 40 × 2,0	Seitliche Halbbügel und andere Teile des Überrollkäfigs

Die Art der Vorgaben für den Aufbau nach DMSB-Handbuch zielen auf den Breitensport ab. Insbesondere bei der Materialauswahl wird vorrangig auf eine gute Schweißbarkeit als auf Leichtbaupotential wert gelegt. Jedoch werden Überrollkäfige bis in den semiprofessionellen Bereich nach DMSB-Handbuch gefertigt, sodass insbesondere bei der Auswahl der Geometrie Potential ungenutzt bleibt.

Der zweite Weg ist die Zertifizierung durch die zuständige ASN.

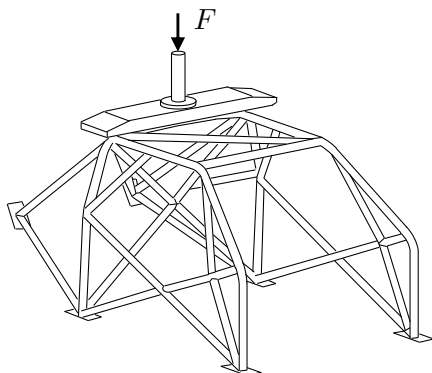


Abbildung 2.4: Test des Hauptbügels (vgl. [113])

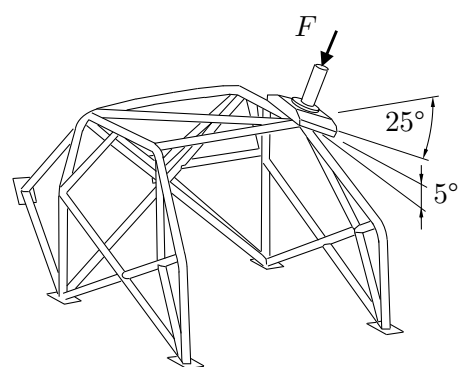


Abbildung 2.5: Test des vorderen Bügels (vgl. [113])

Für die Zertifizierung ist eine FE-Rechnung und/oder ein Eindrückversuch notwendig. Durch die zusätzliche Prüfung dürfen die Rohrdurchmesser und Rohrquerschnitte sowie die Geometrie von den Vorgaben im DMSB-Handbuch abweichen. Die Eindrückversuche sind in den Abbildungen 2.4 und 2.5 schematisch dargestellt und werden in [40] detailliert beschrieben. Neben der eigentlichen Auslegung des Überrollkäfigs ist ein hoher Zertifizierungsaufwand zu betreiben, sodass diese Vorgehensweise professionellen Teams vorbehalten ist.

Die aktuell am Markt befindlichen Überrollkäfige lassen sich nach dem verwendeten Material in vier Gruppen einteilen (siehe Abb. 2.6).

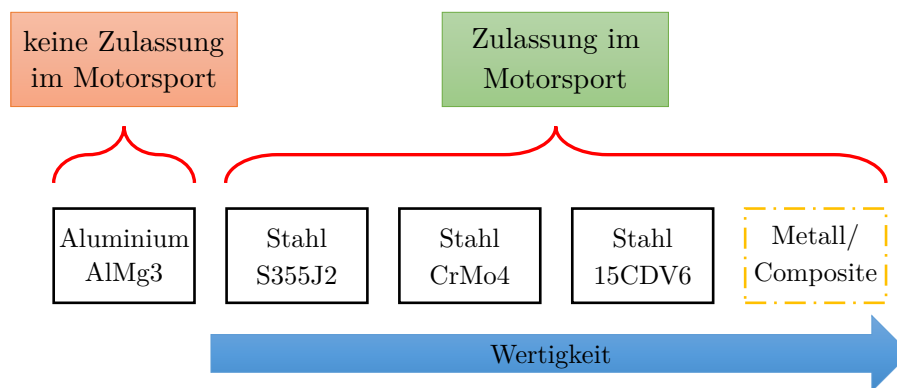


Abbildung 2.6: Einteilung der Überrollkäfige nach Material

Die Überrollkäfige aus Aluminium sind für den Straßenverkehr und besitzen keine Zulassung für den Rennsport aufgrund des allgemeinen Aluminiumverbotes seitens der ASN. Die zweite Gruppe aus dem relativ „einfachen“ Baustahl S355J2 ist für den Eigenbau vorgesehen. Die dritte und vierte Gruppe besteht aus Hochleistungsstählen und bedürfen einer Zulassung durch die ASN. Die Festigkeiten der verwendeten Stähle unterscheidet sich deutlich, sodass die Wertigkeit beginnend von S355J2 bis zum 15CDV6 zunimmt.

2.2.2 Anforderungen an den Überrollkäfig

Für die Zulassung durch die Motorsport-Behörden sind drei Lastfälle definiert worden. Hierbei wird der Überrollkäfig durch eine vorgeschriebene Kraft belastet. Der Test gilt als bestanden, wenn die Strukturintegrität beibehalten wird und die Verformungen in Kraftrichtung weniger als die vorgeschriebenen Grenzwerte betragen. Unter Strukturintegrität wird verstanden, dass der Überrollkäfig seine Form und Geometrie weitgehend beibehält. Hierbei wird nicht zwischen plastischer und reversibler Verformung unterschieden. Im Folgenden sollen die Lastfälle beschrieben werden. Die ersten beiden Lastfälle sind für alle Topologien einzuhalten, währenddessen der dritte Lastfall nur für einen Überrollkäfig in einer Topologie ohne Beifahrer benötigt wird [40].

A-Säule - Frontbügel

Der Überrollkäfig wird mit einer Kraft F durch einen Stempel belastet. Die Kraft wird um 25° um die Längsachse und 5° um die Querachse angestellt. Der Test gilt als bestanden, wenn die Überrollvorrichtung die Strukturintegrität beibehält und die resultierende Durchsenkung nicht größer als 100 mm ist.

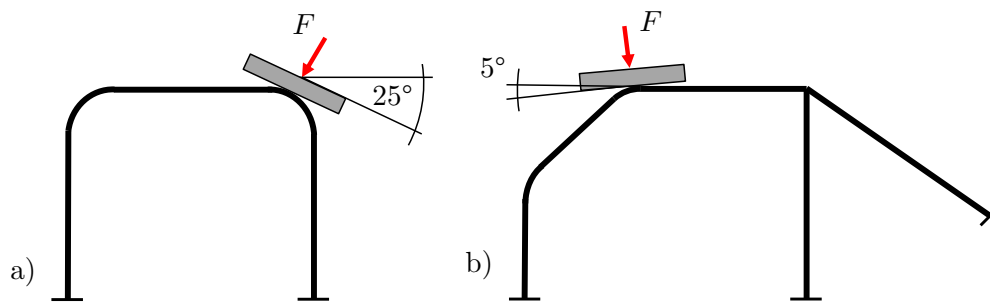


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung: Eindrücktest - A-Säule Frontbügel; a) Vorderansicht; b) Seitenansicht

In Tabelle 2.2 ist die Berechnung der vom Fahrzeuggewicht abhängigen Prüfkraft dargestellt. Weiterhin sind die Abmessungen des Stempels zu finden.

Tabelle 2.2: Prüfkraft und Abmessungen des Stempels für Frontbügel-Eindrücktest [40]

Größe	Wert	Option
F	$35 \cdot w \text{ N kg}^{-1}$	
w	Fahrzeuggewicht + 150 kg	+ 500 kg für Cross-Country-Fahrzeuge der Gruppen T1, T2 und T3 [39]
Länge	$450 \text{ mm} \pm 50 \text{ mm}$	
Breite	$250 \text{ mm} \pm 50 \text{ mm}$	
Dicke	40 mm	
zulässige Durchsenkung	<100 mm	

B-Säule - Hauptbügel

Der Überrollkäfig wird mit einer Kraft F durch einen Stempel mit den in Tabelle 2.3 beschriebenen Abmessungen belastet. Der Test gilt als bestanden, wenn die Überrollvorrichtung die Strukturintegrität beibehält und die resultierende Durchsenkung nicht größer als 50 mm ist. Die Berechnung der Prüfkraft erfolgt mit dem Fahrzeuggewicht und dem in Tabelle 2.3 dargestelltem Faktor.

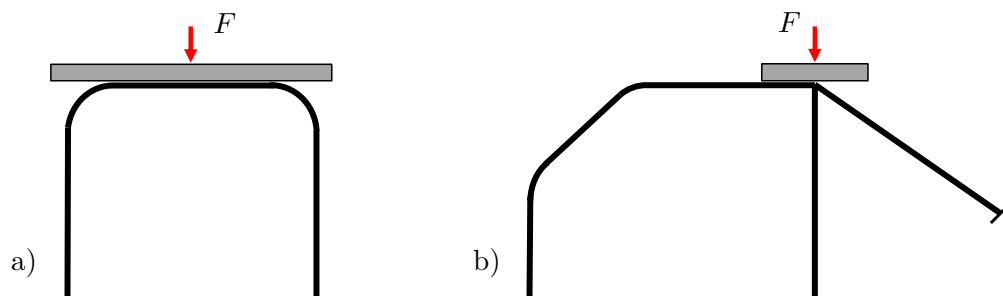


Abbildung 2.8: Schematische Darstellung des Eindrücktests - B-Säule Hauptbügel; a) Vorderansicht; b) Seitenansicht

Tabelle 2.3: Prüfkraft und Abmessungen des Stempels für Hauptbügel-Eindrücktest [40]

Größe	Wert	Option
F	$75 \cdot w \text{ N kg}^{-1}$	
w	Fahrzeuggewicht + 150 kg	+ 500 kg für Cross-Country-Fahrzeuge der Gruppen T1, T2 und T3 [39]
Länge	Breite des Hauptbügels + 10 mm	
Breite	250 mm \pm 50 mm	
Dicke	40 mm	
zul. Durchsenkung	<50 mm	

Seiteneindrücktest

Der Überrollkäfig wird mit einer Kraft F durch einen Stempel belastet. Der Test gilt als bestanden, wenn die Überrollvorrichtung die Strukturintegrität beibehält und die resultierende Durchsenkung nicht größer als 50 mm ist. Dieser Test wird für die Zertifizierung benötigt, wenn der Überrollkäfig eine Topologie für einen Einsatz ohne Beifahrer aufweist. Die Abmessungen des Stempels sowie die Berechnung der Prüfkraft sind in der Tabelle 2.4 zu finden.

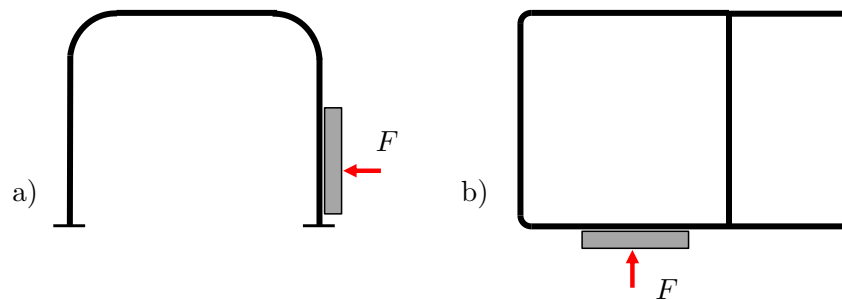


Abbildung 2.9: Schematische Darstellung des Seiteneindrücktests; a) Vorderansicht; b) Draufsicht

Tabelle 2.4: Prüfkraft und Abmessungen des Stempels für Seiteneindrücktest [40]

Größe	Wert
F	$25 \cdot w \text{ N kg}^{-1}$
w	Fahrzeuggewicht + 150 kg
Angriffspunkt	mittig auf Flankenschutz
Länge	Breite des Flankenschutzes + 100 mm
Breite	500 mm \pm 50 mm
Dicke	40 mm
zulässige Durchsenkung	<50 mm

Torsionssteifigkeit

Die Prüfung der Torsionssteifigkeit stellt keine Anforderung zur Zertifizierung dar, jedoch ist eine Versteifung der Karosserie für das Fahrverhalten förderlich und im Renneinsatz gewünscht. Neben der Forderung nach einem möglichst geringen Gewicht stellt die Forderung nach einer möglichst hohen Steifigkeit den Zielkonflikt für den Renneinsatz dar. Die vorhergehenden Anforderungen an die Festigkeit sind für die Zertifizierung notwendig, jedoch für die Fahrleistungen im Renneinsatz nicht weiter von Interesse.

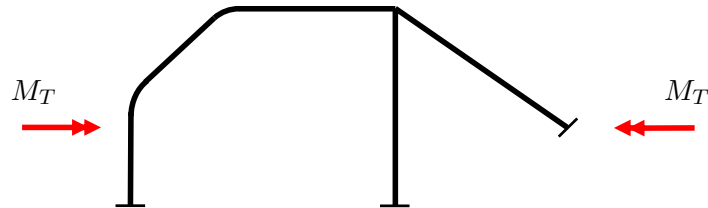


Abbildung 2.10: Schematische Darstellung der Prüfung der Torsionssteifigkeit

2.3 Konzept eines Überrollkäfigs basierend auf Metall-Faserverbund-Rohren

Das Ziel der Entwicklung soll ein Überrollkäfig sein, welcher einem konventionellen Stahl-überrollkäfig überlegen ist. Dies soll nicht nur durch eine bloße Materialsubstitution bewerkstelligt werden, sondern ebenfalls durch eine verbesserte Variationsmöglichkeit der eingesetzten Rohre und die daraus folgenden Einzelsteifigkeiten. Die Abbildung 2.11 zeigt den Zielkonflikt bei der Auslegung des Überrollkäfigs. Die Anforderung „Festigkeit“, welche für die Einhaltung der vorgeschriebenen Tests steht, kann eindeutig beschrieben werden. Die Torsionssteifigkeit verhält sich gegenläufig zum Gewicht. Durch geschickte Auslegung kann dieses Verhältnis optimiert werden, indem alle eingesetzten Rohre im Gesamttragwerk möglichst gleichmäßig belastet werden. Jedoch ist der Kompromiss aus Gewicht/Torsionssteifigkeit nicht direkt bekannt und nicht für alle Fahrzeuge gleich. Somit stellen verschiedene Gewichts/Torsionssteifigkeitsverhältnisse einen weiteren Designfreiheitsgrad dar (siehe Abb. 2.11). Diese Varianten könnten z. B. in einer Fahrdynamik-Simulation verglichen werden.

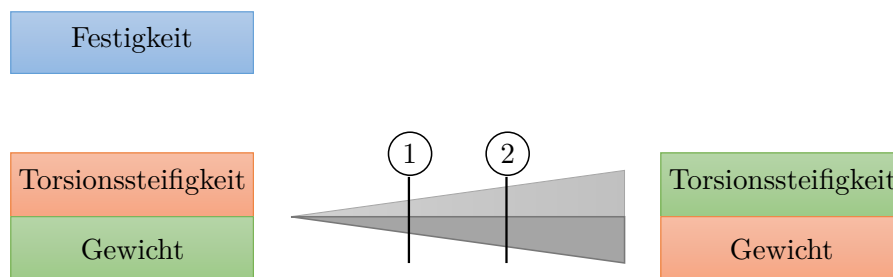


Abbildung 2.11: Zielkonflikt und Variationsmöglichkeiten des Hybrid-Überrollkäfigs

Die Gesamt-Torsionssteifigkeit hängt von den Einzelsteifigkeiten der Rohre sowie von deren Anordnung im Überrollkäfig ab. Im Folgenden soll ein Konzept für ein Metall-Faser-Verbundkunststoff-Rohr dargestellt werden, welches eine höhere spezifische Festigkeit als konventionelle Stahlrohre bietet und eine Anpassungen der Steifigkeit erlaubt.

2.3.1 Metall-Faserverbundkunststoff-Rohr

Die Abbildung 2.12 zeigt schematisch den grundsätzlichen Laminataufbau. Der Metallliner dient als Formgeber für die Verbundwerkstoff-Ummantelung. Zusätzlich wird durch eine mögliche plastische Verformung des metallischen Liners die Strukturintegrität des Gesamtverbundes erreicht. Für die zweite Schicht wird ein $\pm 45^\circ$ -Gewebe vorgesehen. Diese Schicht fungiert zum einen als Kopplungsschicht zwischen dem Metallliner und dem weiteren Laminat. Zum anderen werden hier auftretende Schubspannungen aufgenommen. Die dritte Schicht besteht aus mehreren UD-Lagen, die hauptsächlich die Zug- und Druckspannungen aufnehmen und zusätzlich die Steifigkeit erhöhen. Je nach Anforderungen können die UD-Lagen durch weitere $\pm 45^\circ$ -Gewebebelagen unterbrochen werden. Die abschließende vierte Schicht nimmt zum Teil weitere Schubspannungen auf, jedoch ist die Hauptaufgabe das Zusammenhalten der unteren Schichten im Versagensfall und somit die Verhinderung des Abplatzens und einer möglichen Splitterbildung.

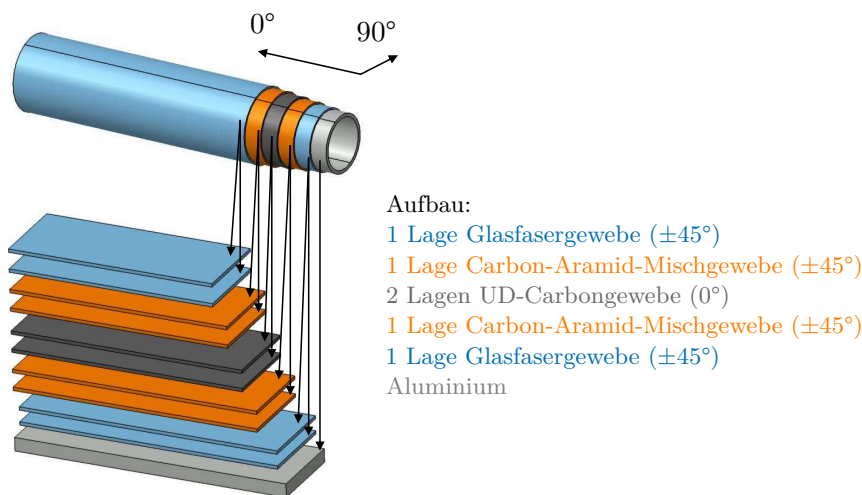


Abbildung 2.12: Aufbau des Metall-Faserverbundkunststoff-Rohres

2.3.2 Konstruktive Ausführung

Die Abbildung 2.13 zeigt die Vorgehensweise bei der Entwicklung des Überrollkäfigs. Hierzu soll zunächst eine CAD-Konstruktion von einem Überrollkäfig in Mindestkonfiguration erstellt werden. Hieraus wird ein Konstruktionsmodell abgeleitet, indem die konstruktiven Details entwickelt werden. Weiterhin werden ein Flächenmodell für FE-Berechnungen sowie die Koordinaten für ein Balkenmodell abgeleitet.

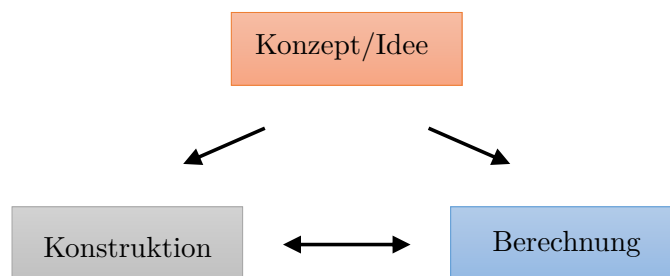


Abbildung 2.13: Konstruktionsprozess für Machbarkeitsstudie

Als Plattform für die Entwicklung des Überrollkäfts dient ein Audi TT (8J). In den Abbildungen 2.14 und 2.15 sind die Ergebnisse des 3D-Scans dargestellt, welche für das Package des Überrollkäfts verwendet werden. Hierfür werden aus den gescannten Daten Hüllflächen abgeleitet, auf denen Punkte oder Linien referenziert werden können. Darauf folgend wird ein assoziatives Linienmodell aufgebaut, welches bereits die benötigte Geometrie für eine Berechnung mit Balkenelementen liefert. Weiterhin wird ein Flächenmodell abgeleitet, das für die Detaillierung der Klebeschalen und als Basis für ein FE-Schalenmodell dient.

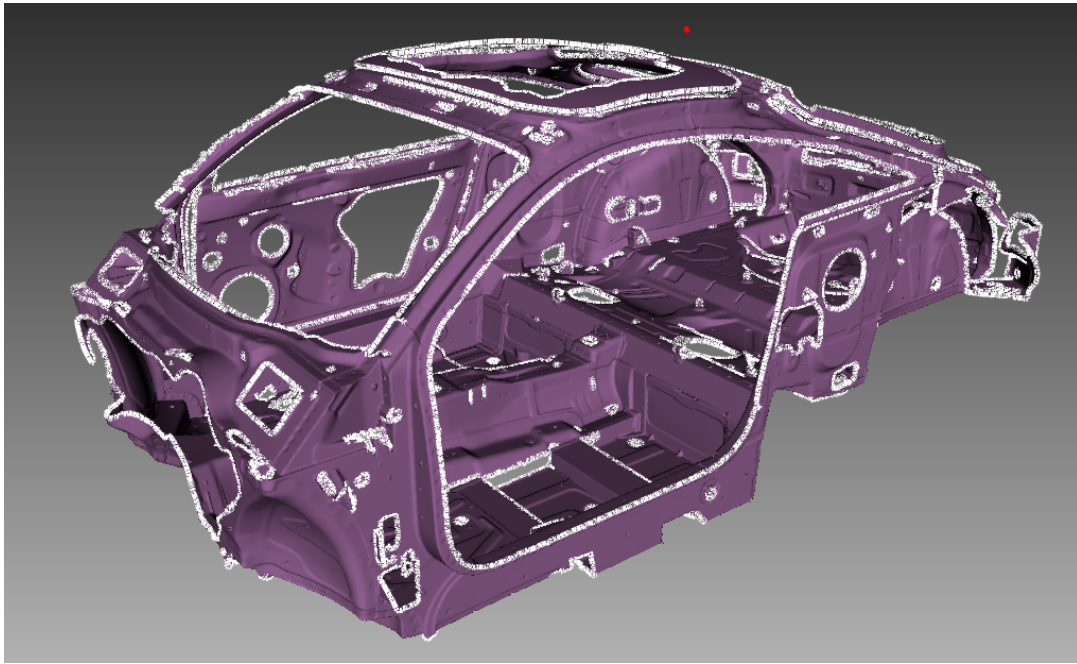


Abbildung 2.14: 3D-Scan der Rohkarosse (Quelle: Eigene Darstellung)

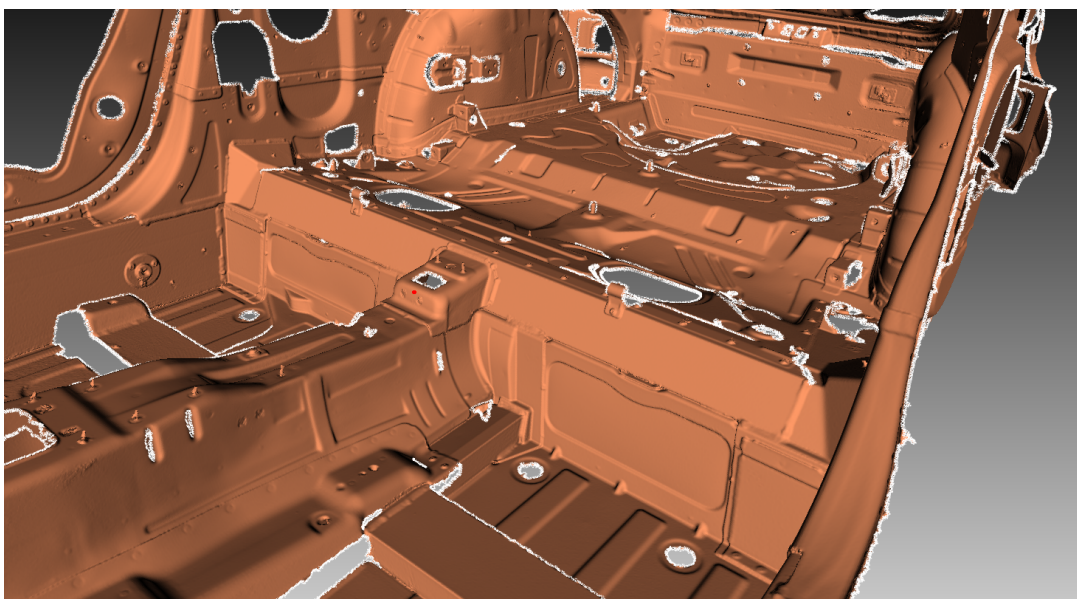


Abbildung 2.15: 3D-Scan der Rohkarosse - Detail (Quelle: Eigene Darstellung)

Die Abbildung 2.16 zeigt einen Überrollkäfig in Differentialbauweise mit Metall-Faser-Verbundkunststoff-Rohren. Die in blau dargestellten Komponenten stellen die Verbindungspunkte zwischen Karosserie und Überrollkäfig dar und sind als Schweißkonstruktionen ausgeführt.

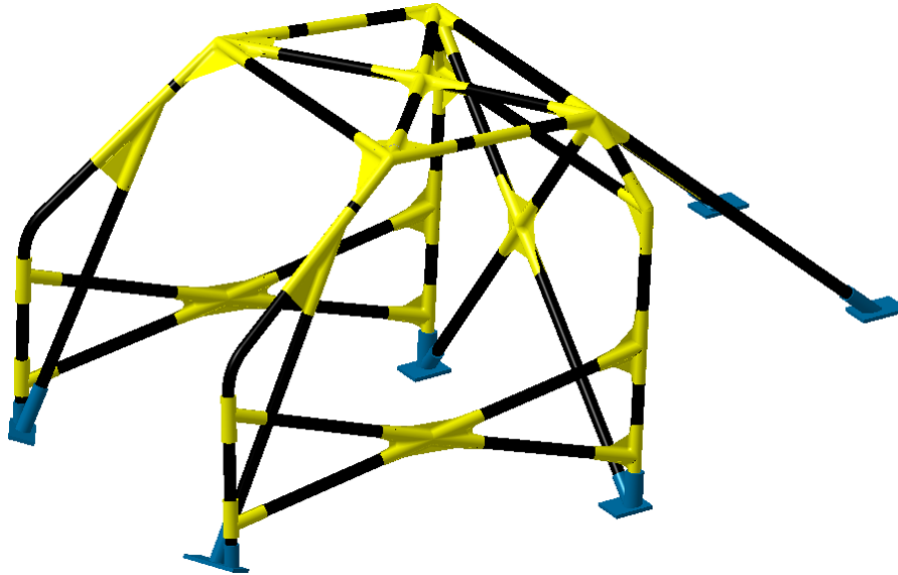


Abbildung 2.16: Überrollkäfig in Differentialbauweise

Die Verbindungselemente zwischen den Rohren sind in gelb dargestellt. Diese bestehen aus zwei Faserverbund-Halbschalen, welche durch eine Klebung mit den Rohren verbunden werden. Ein Prototyp einer Klebeschale ist in Abbildung 2.17 dargestellt. Die Schale ist mehrlagig mit Carbon-Gewebe in einer quasiisotropen Anordnung sowie einer Aramid-Deckschicht aufgebaut.

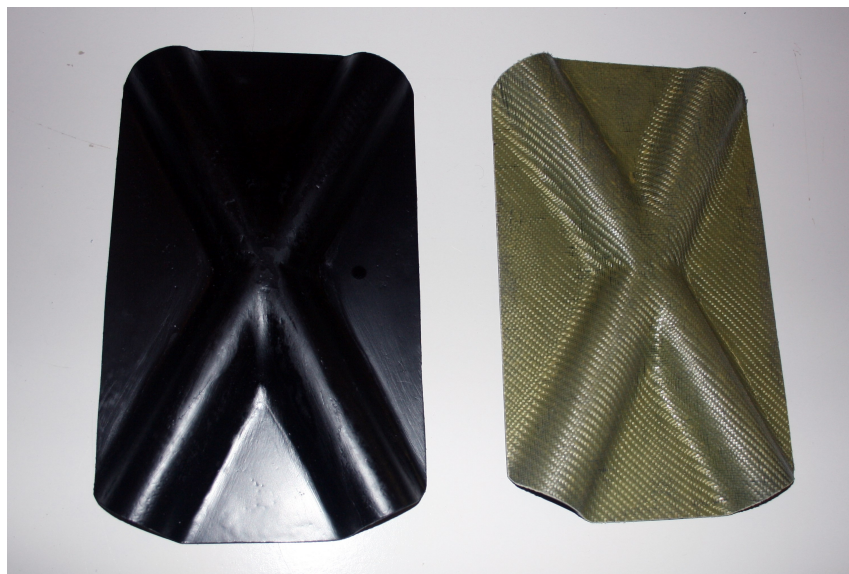


Abbildung 2.17: Klebeschale zur Verbindung der Rohre; links - lackiert, rechts - unlackiert mit sichtbarer Deckschicht aus Aramid

Die in Abbildung 2.16 schwarz dargestellten Rohre sind mit Ausnahme eines Teiles des Hauptbügels an der A-Säule gerade. Der mittels Vakuuminfusion hergestellte Prototyp der Verbundrohre mit einer alternativen Deckschicht aus ballistischem Polyamid ist in Abbildung 2.18 im Querschnitt und in der Längsachse dargestellt.



Abbildung 2.18: Metall-Faserverbundkunststoff-Rohr; links - Querschnitt mit Fertigungsdecklage; rechts - mit aufgebrachter Decklage aus ballistischem Polyamid als Alternativschicht zu Aramid

Die abgebildeten Prototypen dienen vorrangig einer Machbarkeitsstudie zur Fertigung der Bauteile und bedürfen einer weiteren festigkeits-/steifigkeitstechnischen Betrachtung.

2.3.3 Komponenten und Einbau

Eine vollständige Verklebung der Rohre zum fertigen Überrollkäfig innerhalb des Fahrzeugs soll vermieden werden, sodass der Überrollkäfig in drei Teilbaugruppen geteilt wird (siehe Abb. 2.19). Dabei teilt sich der Überrollkäfig in die Baugruppe „Bügel A-Säule“, „Bügel B-Säule“ und „Abstützung C-Säule“.

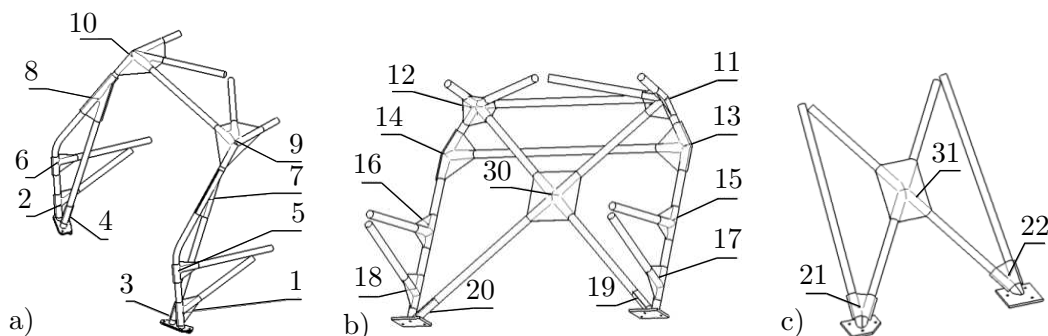


Abbildung 2.19: Teilbaugruppen des Hybrid-Überrollkäfigs; a) „Bügel A-Säule“, b) „Bügel B-Säule“ und c) „Abstützung C-Säule“

Die außerhalb des Fahrzeuges gefertigten Baugruppen werden in die Rohkarosserie eingebracht und durch die in der Abbildung 2.20 orange dargestellten Schalen durch eine Klebung gefügt.

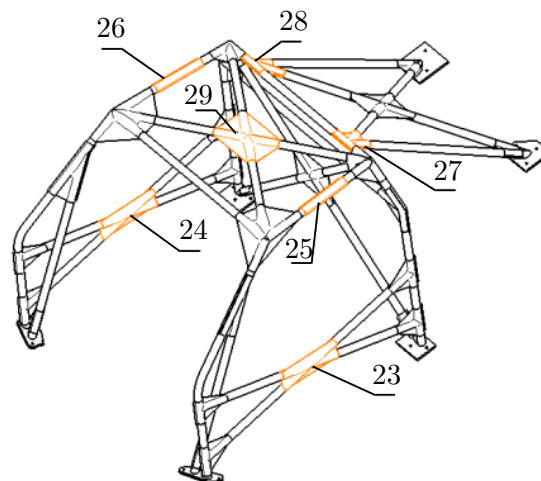


Abbildung 2.20: Fügung der Teilbaugruppen mit CFK-Schalen durch kleben

Exemplarisch soll der Einbau des „Bügel A-Säule“ in die Karosserie dargestellt werden (siehe Abb. 2.21). Hierzu wird der Einbauvorgang im CAD-System simuliert und während des Vorgangs wird eine Kollisionsanalyse durchgeführt. Bei der zugrundeliegenden Rohkarosserie sind keine Front- und Seitenscheiben verbaut, sodass die Öffnung der Seitenscheiben ebenfalls zur Einführung der Teil-Baugruppe verwendet werden. Soll der Überrollkäf in ein bestehendes Fahrzeug mit montierten Seitenscheiben eingebaut werden, sind weitere Trennungen an den Teil-Baugruppen vorzunehmen.

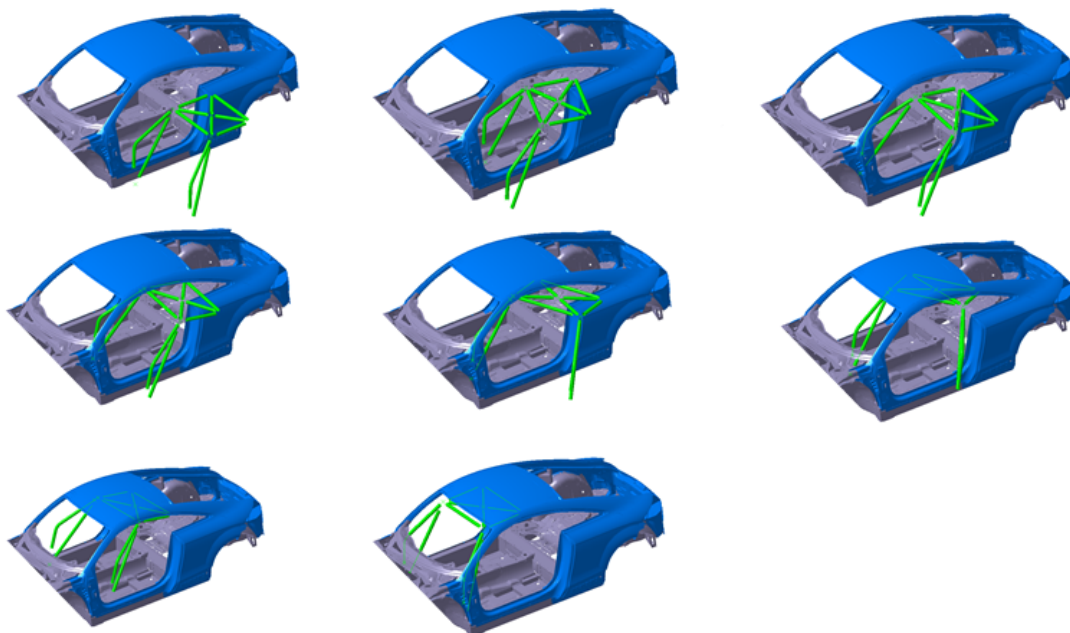


Abbildung 2.21: Kollisionsanalyse des Einbauvorganges des „Bügel A-Säule“

Kapitel 3

Theorie des Übertragungsmatrizenverfahrens

Das Übertragungsmatrizen- bzw. das Reduktionsverfahren ist ein Berechnungsverfahren zur Auslegung von Tragwerken anhand ihrer Schnittkraft- und Deformationsgrößenverläufe. Durch eine Reduzierung des Kräftesystems auf eine Kräfte- und Momentenbilanz und eine Verschiebungs- und Verdrehungssumme in einem bestimmten Punkt ergibt sich ein Zustandsvektor. Mit Hilfe einer Übertragungsmatrix \mathbf{F} und dem Zustandsvektor \mathbf{z}_0 am Anfangspunkt ergibt sich der Zustandsvektor \mathbf{z}_1 am Endpunkt mit den gesuchten Kraft- und Verschiebungsverläufen [59].

Beim Reduktionsverfahren werden die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen verwendet. Die Unterscheidung zum klassischen analytischen Verfahren liegt in der Anwendung der Matrizenrechnung. Dadurch ergibt sich ein weitgehend strukturierter Berechnungsablauf, welches zum einen die Nachvollziehbarkeit erhöht und zum anderen eine bessere Implementierung in einem softwarebasierten Berechnungsablauf ermöglicht.

Dem Balkenmodell des Übertragungsmatrizenverfahrens liegt die Balkentheorie nach Bernoulli zugrunde. Es gelten die Annahmen, dass der Balkenquerschnitt klein zu der Ausdehnung in der Balkenlängsachse ist und der Querschnitt ist stets senkrecht zur Balkenlängsachse [49]. Weiterhin werden kleine Verformungen und lineares Materialverhalten angenommen.

Es erfolgt keine Betrachtung der Torsion, da die Torsionsbeanspruchung der Balken bei den relevanten Lastfällen unerheblich ist. Ebenso wird in dieser Arbeit das Stabilitätsversagen der Balken nicht betrachtet. Für eine praktische Auslegung sind gefährdete Balken zusätzlich auf Versagen durch Knicken zu prüfen und es wird hierfür auf [84] verwiesen.

3.1 Theorie des Übertragungsmatrizenverfahrens bei unverzweigten Tragwerken

Das Grundprinzip des Verfahrens soll anhand des Durchlaufträgers aus Abbildung 3.1 beschrieben werden und orientiert sich an Kersten [59]. Der mehrfach gelagerte Balken wird im ersten Abschnitt mit einer Streckenlast beaufschlagt und durch die Kraftverläufe M und F_Q sowie die Deformationsgrößen Absenkung w und Querschnittsverdrehung φ beschrieben. Wenn das freie Ende mit den Größen $F_{Q,0}$, w_0 , φ_0 und M_0 beaufschlagt wird, dann sind die Kraft- und Deformationsgrößen an allen Stützen lineare Funktionen von den beaufschlagten Größen. Da $F_{Q,0}$, w_0 , φ_0 und M_0 beliebig gewählt werden können, werden diese als Freigrößen bezeichnet.

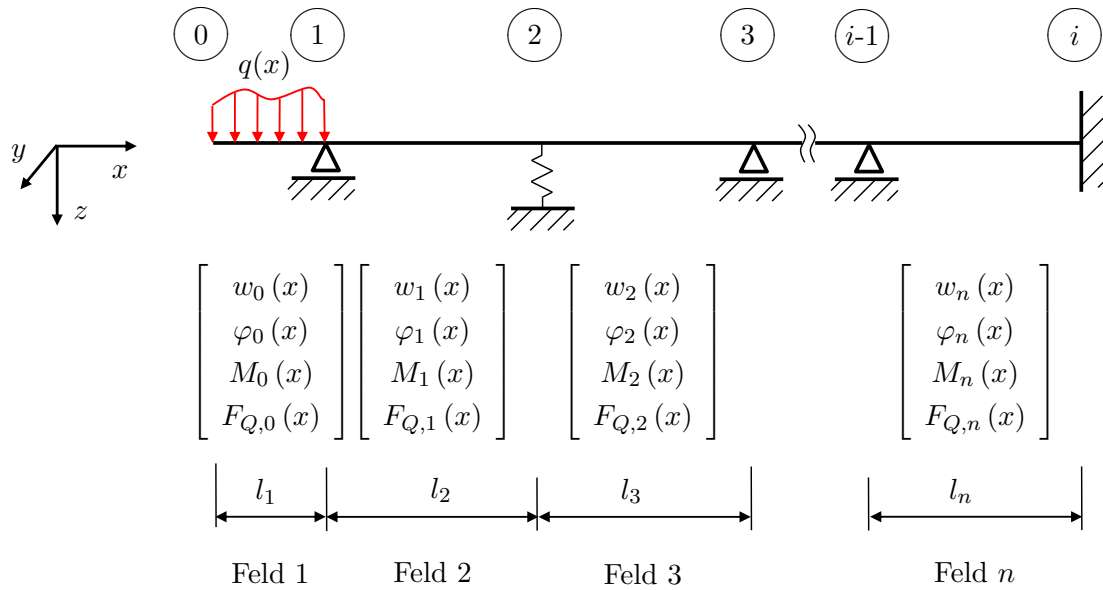


Abbildung 3.1: Beliebige gestützter Durchlaufträger mit eingetragenen Lasten und Zustandsvektoren sowie Benennung der Felder und Lagerstellen (vgl. [59])

Da am linken Rand kein Moment und keine Querkraft auftreten, gilt für die Freigrößen $M_0(0) = 0$ und $F_{Q,0}(0) = 0$. Die verbleibenden unbekannten Freigrößen $w_0(0)$ und $\varphi_0(0)$ können über die Randbedingungen am rechten Trägerende bestimmt werden. Mit $w_n(l_n) = 0$ und $\varphi_n(l_n) = 0$ lassen sich zwei lineare Gleichungen für $w_0(0)$ und $\varphi_0(0)$ aufstellen. Nach Lösung des entstehenden Gleichungssystems können die Kraft- und Deformationsgrößen für jeden Punkt des Trägers berechnen werden.

3.1.1 Definition der Schnitt- und Deformationsgrößen im lokalen KOS

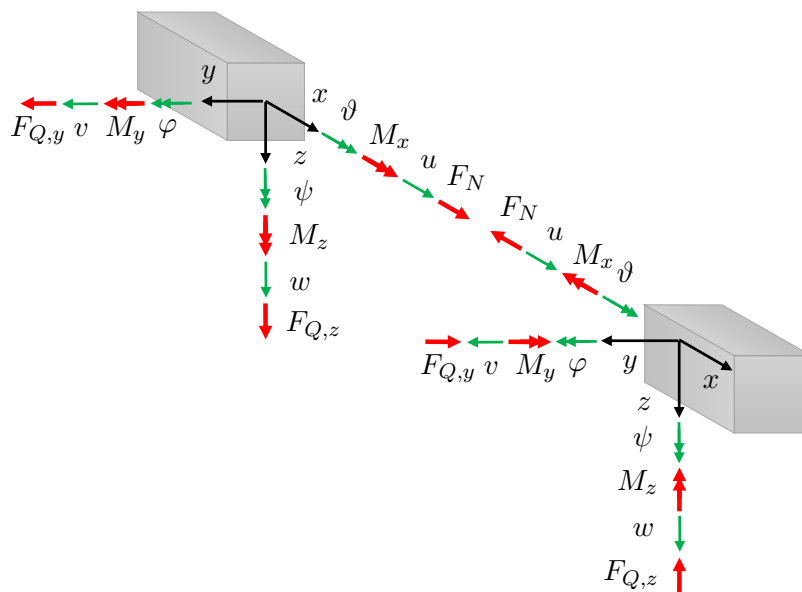


Abbildung 3.2: Definition der Schnittkräfte und Deformationen im Raum (vgl. [59])

In Abbildung 3.2 sind alle am Balken auftretenden Schnittkräfte und Deformationsgrößen dargestellt. Jeder Kraftgröße F_N , $F_{Q,y}$, $F_{Q,z}$, M_x , M_y und M_z ist eine Deformationsgröße u , v , w , ϑ , φ und ψ zugeordnet. Diese so entstehenden Paare werden als konjugierte Paare bezeichnet. Ein Doppelpfeil kennzeichnet die Drehachse für ein angreifendes Moment mit dem Drehsinn gemäß der „rechten Hand-Regel“. Weiterhin werden die in Tabelle 3.1 dargestellten Belastungsfunktionen definiert.

Tabelle 3.1: Belastungsfunktionen mit Wirkrichtungen

in x -Richtung	Längsbelastung	$p(x)$
	Torsionsbelastung	$t(x)$
in y -Richtung	Querbeltung	$q_y(x)$
in z -Richtung	Querbeltung	$q_z(x)$

Die weitere Betrachtung des Verfahrens erfolgt in der Ebene. In der Literatur [59] werden am linken Schnittufer das Moment M_y im Uhrzeigersinn sowie die Querkraft $F_{Q,z}$ in negativer z -Richtung definiert. Am rechten Schnittufer zeigen dadurch konjugierte Größen in die gleiche Richtung. Da beim Reduktionsverfahren nur mit den Kraft-/Deformationsgrößen am rechten Schnittufer gerechnet wird, ergibt sich im weiteren Verfahren insbesondere bei räumlichen Tragwerken eine übersichtlichere Berechnung. In dieser Arbeit wird jedoch die in der Technischen Mechanik übliche Vorzeichen-Definition verwendet, da eine übersichtlichere Herleitung als wichtiger betrachtet wird. Die Schnittkräfte und Deformationen werden wie in Abbildung 3.3 dargestellt definiert.

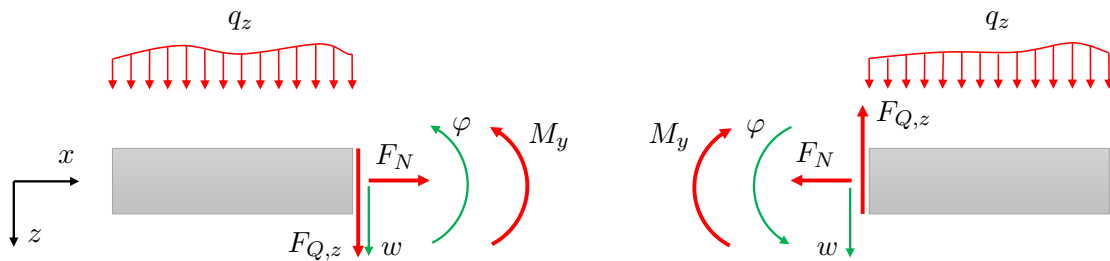


Abbildung 3.3: Definition der Schnittkräfte und Deformationen in der x - z -Ebene

3.1.2 Definition häufig verwendeter Begriffe

In der Literatur häufig verwendete Begriffe sind:

- Feld: Bereich zwischen zwei Unstetigkeitsstellen z. B. Lager oder angreifende Kräfte
- Freigröße: frei wählbare unbekannte Größen an einem Lager
- Randbedingung: Art und Wert der Bedingung an einem Lager
- Unstetigkeitsstelle: Änderung in der Belastung der Geometrie z. B. durch ein Lager oder durch angreifende Kräfte

Zustandsvektor

Der Zustandsvektor enthält alle Kraft- und Deformationsgrößen. Die Anwendung beschränkt sich im Folgenden auf ebene Tragwerke in der x - z -Ebene, die mittels Normalkräften sowie durch Biegung und Biegemomente belastet werden. Der Übersichtlichkeit halber wird beim Zustandsvektor und den Kraft- und Deformationsgrößen die Abhängigkeit von x weggelassen. Es wird der Index k zur Kennzeichnung des jeweiligen Abschnitts des Tragwerkes verwendet. Da der Anfangswert und der Endwert des jeweiligen Balkenabschnittes häufig benötigt werden, werden diese über einen weiteren Index 0 bzw. 1 gekennzeichnet. Es gilt:

$$\mathbf{z}_k(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ F_N(x) \\ F_Q(x) \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ w_k \\ \varphi_k \\ M_k \\ F_{N,k} \\ F_{Q,k} \\ 1 \end{bmatrix},$$

sowie

$$\mathbf{z}_k(0) = \mathbf{z}_{k,0}$$

und

$$\mathbf{z}_k(l_k) = \mathbf{z}_{k,1}.$$

Der Zustandvektor besteht somit aus drei Weggrößen, drei Kraftgrößen und dem sogenannten Identitätsfaktor der immer den Wert 1 annimmt und im nächsten Abschnitt beschrieben wird [48].

Feldmatrix

Die Feldmatrizen sind entsprechend Abbildung 3.4 aufgebaut [48]:

$$\begin{bmatrix} \text{Weggrößen} \\ \text{Kraftgrößen} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Kinematik} & \text{Nachgiebigkeit} & & & & \\ & & & & & \\ \text{Steifigkeit} & \text{Gleichgewicht} & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Weggrößen} \\ \text{Kraftgrößen} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Abbildung 3.4: Physikalische Interpretation des Aufbaus der Feldmatrix (vgl. [48])

- Kinematik: Verknüpfung der Weggrößen
- Nachgiebigkeit: Verknüpfung der Weggrößen mit Schnittreaktionen; interpretierbar als Kehrwert der Steifigkeit
- Steifigkeit: Verknüpfung der Weggrößen mit Schnittreaktionen; interpretierbar als Federsteifigkeit
- Gleichgewicht: Verknüpfung von Schnittgrößen untereinander; interpretierbar als Kräfte- und Momentengleichgewicht
- Lastabhängigkeit: Parameter zur Einbringung äußerer Lasten
- Identitätszeile: Die Feldmatrix besteht aus dem quadratischen Koeffizientenblock, der in der Abbildung 3.4 mit Kinematik, Nachgiebigkeit, Steifigkeit und Gleichgewicht beschriftet ist und dem als Lastabhängigkeit gekennzeichneten Lastvektor. Durch Hinzufügen der Identitätszeile, welche die Werte 0 und 1 annimmt, wird die Feldmatrix wieder quadratisch und kann so mit weiteren Feld-/Punktmatrizen multipliziert werden.

3.1.3 Feldmatrix

Es wird der in Abbildung 3.5 dargestellte Balken betrachtet. Dieser wird an jeder Unstetigkeitsstelle, beispielsweise einem Lager oder einem Lastangriff in ein Feld unterteilt. Jedes Feld k mit der Länge l_k besitzt ein eigenes lokales Koordinatensystem, wobei nur die x -Richtung dargestellt ist.

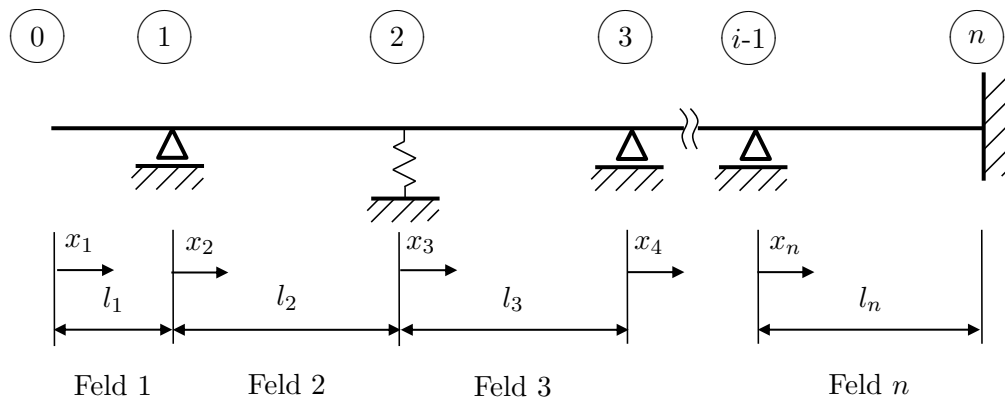


Abbildung 3.5: Einteilung des Tragwerkes in Felder

Feldmatrix für Biegung

In Abbildung 3.6 ist der freigeschnittene Träger für einen Abschnitt dargestellt. Der Träger wird unmittelbar rechts neben dem linken Lager i geschnitten. Dieser Punkt wird mit dem Index 0 bezeichnet. Wiederum wird der Träger auf der rechten Seite unmittelbar links des Lagers $i + 1$ geschnitten. Die entstehende Position wird mit dem Index 1 beschrieben. Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen beiden Schnitten gesucht werden. Dabei wird lediglich das Feld betrachtet. Die Unstetigkeitsstellen (z. B. an dem Lagern) werden im Weiteren über sogenannte Punktmatrizen beschrieben. Es wird weiterhin die Schreibweise nach Abschnitt 3.1.2 verwendet und somit auf die Darstellung der Abhängigkeiten von x verzichtet.

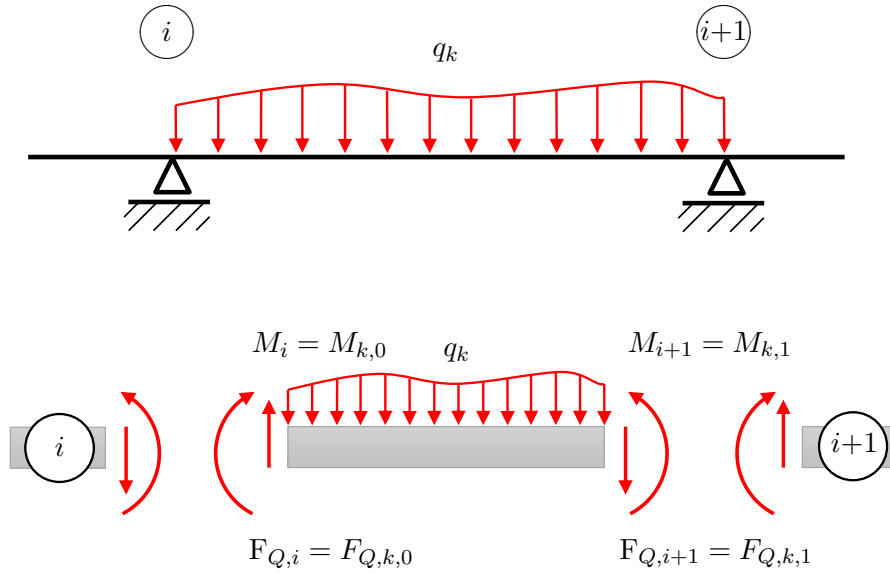


Abbildung 3.6: Einzelfeld mit Lagerungen und Querlast q_k ; Freigeschnittenes Einzelfeld mit Schnittkräften (vgl. [59])

Ausgehend von der Differentialgleichung der Biegelinie (Gleichung 3.1):

$$\left[EI_y w'' \right]'' = EI_y w^{IV} = q_k \quad (3.1)$$

lautet die allgemeine Lösung mit den Ableitungen:

$$\begin{aligned} EI_k w_k^{IV} &= q_k = q_k, \\ EI_k w_k''' &= -F_{Q,k} = \int_0^{x_k} q_k(\xi) d\xi + C_1, \\ &= F_{Q,k,I} + C_1, \\ EI_k w_k'' &= -M_k = \int_0^{x_k} F_{Q,k,I}(\xi) d\xi + C_1 x_k + C_2, \\ &= M_{k,I} + C_1 x_k + C_2, \\ EI_k w_k' &= EI_k \varphi_k = EI_k \int_0^{x_k} \frac{M_{k,I}(\xi)}{EI_k} d\xi + C_1 \frac{x_k^2}{2} + C_2 x_k + C_3, \\ &= EI_k \varphi_{k,I} + C_1 \frac{x_k^2}{2} + C_2 x_k + C_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI_k w_k &= EI_k \int_0^{x_k} \varphi_{k,I}(\xi) d\xi + C_1 \frac{x_k^3}{6} + C_2 \frac{x_k^2}{2} + C_3 x_k + C_4, \\
 &= EI_k w_{k,I} + C_1 \frac{x_k^3}{6} + C_2 \frac{x_k^2}{2} + C_3 x_k + C_4,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

mit

$$\begin{aligned}
 F_{Q,k,I} &= \int_0^{x_k} q_k(\xi) d\xi, \\
 M_{k,I} &= \int_0^{x_k} F_{Q,k,I}(\xi) d\xi, \\
 \varphi_{k,I} &= -\frac{1}{EI_k} \int_0^{x_k} M_{k,I}(\xi) d\xi, \\
 w_{k,I} &= \int_0^{x_k} \varphi_{k,I}(\xi) d\xi.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die vier Integrationskonstanten werden durch das linke Schnittufer bei $x_k = 0$ bestimmt:

$$\begin{aligned}
 F_{Q,k}(x_k = 0) = F_{Q,k,0} &\rightarrow C_1 = F_{Q,k,0}, \\
 M_k(x_k = 0) = M_{k,0} &\rightarrow C_2 = M_{k,0}, \\
 \varphi_k(x_k = 0) = \varphi_{k,0} &\rightarrow C_3 = -EI_k \varphi_{k,0}, \\
 w_k(x_k = 0) = w_{k,0} &\rightarrow C_4 = EI_k w_{k,0}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wird Gleichung 3.4 in das Gleichungssystem 3.2 eingesetzt ergibt sich ein neues Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 w_k &= 1 \cdot w_{k,0} - x_k \varphi_{k,0} + \frac{x_k^2}{2EI_k} M_{k,0} + \frac{x_k^3}{6EI_k} F_{Q,k,0} + w_{k,I} \cdot 1, \\
 \varphi_k &= 1 \cdot \varphi_{k,0} - \frac{x_k}{EI_k} M_{k,0} - \frac{x_k^2}{2EI_k} F_{Q,k,0} + \varphi_{k,I} \cdot 1, \\
 M_k &= 1 \cdot M_{k,0} + x_k F_{Q,k,0} + M_{k,I} \cdot 1, \\
 F_{Q,k} &= 1 \cdot F_{Q,k,0} + F_{Q,k,I} \cdot 1, \\
 q_k &= q_k \cdot 1.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Das Gleichungssystem 3.5 wird durch q_k geteilt und in Matrizenform dargestellt:

$$\begin{bmatrix} w_k \\ \varphi_k \\ M_k \\ F_{Q,k} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_{k,1} & \frac{x_{k,1}^2}{2EI_k} & \frac{x_{k,1}^3}{6EI_k} & w_{k,I} \\ 0 & 1 & -\frac{x_{k,1}}{EI_k} & -\frac{x_{k,1}^2}{2EI_k} & \varphi_{k,I} \\ 0 & 0 & 1 & x_{k,1} & M_{k,I} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & F_{Q,k,I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k,0} \\ \varphi_{k,0} \\ M_{k,0} \\ F_{Q,k,0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

sowie in Kurzform:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{F}_{k,B} \cdot \mathbf{z}_{k,0}.$$

Die Zustandsvektoren am linken Rand, an der Position x_k und am rechten Rand mit $x_k = l_k$ lauten:

$$\mathbf{z}_{k,0} = \begin{bmatrix} w_{k,0} \\ \varphi_{k,0} \\ M_{k,0} \\ F_{Q,k,0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} w_k \\ \varphi_k \\ M_k \\ F_{Q,k} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_{k,1} = \begin{bmatrix} w_{k,1} \\ \varphi_{k,1} \\ M_{k,1} \\ F_{Q,k,1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Die gesuchte Feldmatrix $\mathbf{F}_{k,B}$ für Biegung lautet somit:

$$\mathbf{F}_{k,B} = \begin{bmatrix} 1 & -x_k & \frac{x_k^2}{2EI_k} & \frac{x_k^3}{6EI_k} & w_{k,I} \\ 0 & 1 & -\frac{x_k}{EI_k} & -\frac{x_k^2}{2EI_k} & \varphi_{k,I} \\ 0 & 0 & 1 & x_k & M_{k,I} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & F_{Q,k,I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Für $x_k = l_k = x_{k,1}$ ergibt sich der Zusammenhang zwischen den beiden Trägerenden 0 und 1:

$$\mathbf{z}_{k,1} = \mathbf{F}_{k,B,1} \cdot \mathbf{z}_{k,0}.$$

Feldmatrix für Längsverschiebung

Zur Herleitung der Feldmatrix für Längsverschiebung wird die Differentialgleichung 3.8 gelöst. Der Querschnitt A sowie der E-Modul E werden als Abschnittsweise konstant angenommen:

$$-\left[E_k A_k u_k'\right]' = -E_k A_k u_k'' = p_k. \quad (3.8)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet [59]:

$$\begin{aligned}
 -\left[E_k A_k u_k'\right]' &= p_k, \\
 -E_k A_k u_k' &= F_{N,k} = \int_0^{x_k} p_k d\xi + C_1, \\
 &= F_{N,k,I} + C_1, \\
 -E_k A_k u_k &= E A_k \int_0^{x_k} \frac{F_{N,k,I}}{E_k A_k} d\xi + C_1 x_k + C_2, \\
 &= -u_{k,I} E_k A_k + C_1 x_k + C_2,
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 u_{k,I} &= \int_0^{x_k} p_k d\xi, \\
 F_{N,k,I} &= \int_0^{x_k} F_{N,k} d\xi,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

als Belastungsgrößen. Nach Umformung kann das Gleichungssystem in Matrixform zusammengefasst werden:

$$\begin{bmatrix} u_k \\ F_{N,k} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{x_k}{EA} & u_{k,I} \\ 0 & 1 & F_{N,k,I} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k,0} \\ F_{N,k,0} \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{z}_{k,N} = \mathbf{F}_{k,N} \cdot \mathbf{z}_{k,N,0}.$$

Feldmatrix für Torsionsbeanspruchung

Vorversuche haben gezeigt, dass die Torsionsbeanspruchung der einzelnen Balken bei den üblichen Lastfällen vernachlässigbar ist. Sie wird somit im Weiteren nicht betrachtet. Der Vollständigkeit halber werden die Feldmatrizen für Torsionsbeanspruchungen ohne Herleitung in Gleichung 3.11 angegeben [59]:

$$\begin{bmatrix} \vartheta_k \\ M_{x,k} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{x_k}{GI_T} & \vartheta_{k,I} \\ 0 & 1 & M_{x,k,I} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{k,0} \\ M_{x,k,0} \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

$$\mathbf{z}_{k,T} = \mathbf{F}_{k,T} \cdot \mathbf{z}_{k,T,0}.$$

Feldmatrix für allgemeine Belastung

Die Feldmatrizen, sowie die Zustandsvektoren für Biegung und Längsverschiebungen werden zu einem Zustandsvektor und einer Feldmatrix zusammengefasst:

$$\begin{bmatrix} u_k \\ w_k \\ \varphi_k \\ M_k \\ F_{N,k} \\ F_{Q,k} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x_k}{EA} & 0 & u_{k,I} \\ 0 & 1 & -x_k & \frac{x_k^2}{2EI_y} & 0 & \frac{x_k^3}{6EI_y} & w_{k,I} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{x_k}{EI_y} & 0 & -\frac{x_k^2}{2EI_y} & \varphi_{k,I} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_k & M_{k,I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & F_{N,k,I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & F_{Q,k,I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k,0} \\ w_{k,0} \\ \varphi_{k,0} \\ M_{k,0} \\ F_{N,k,0} \\ F_{Q,k,0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{z}_{k,0}.$$

Die Belastungsgrößen $u_{k,I}$, $w_{k,I}$, $\varphi_{k,I}$, $M_{k,I}$, $F_{N,k,I}$ und $F_{Q,k,I}$ sind durch Integration der Gleichung 3.3 zu berechnen oder aus [59] zu entnehmen.

3.1.4 Punktmatrix

Das Tragwerk ist an den Unstetigkeitsstellen i in die Felder k unterteilt. Zwei angrenzende Felder werden über Punktmatrizen verknüpft. Eine Unstetigkeitsstelle kann ein Lager, ein Gelenk, ein Sprung im Querschnitt oder weitere Änderungen in der Geometrie oder Belastung sein. Die sich an der Unstetigkeitsstelle sprunghaft ändernde Größe wird Sprunggröße genannt, welche mit dem Index s gekennzeichnet wird. Die Verknüpfung von mehr als zwei Feldern wird im Abschnitt 3.2 behandelt.

Im Folgenden sollen eine Auswahl möglicher Lagertypen sowie weitere Unstetigkeitsstellen beschrieben werden. Weitere Typen sind den Tabellen aus [59] zu entnehmen.

Festlager, gelenkiges Lager

Die Stützkraft am Lager (Abb. 3.7) erzeugt eine sprunghafte Änderung der Sprunggröße $F_{Q,i}^s$. Die Größe muss als Unbekannte in die Berechnung aufgenommen werden. Es gilt weiterhin, dass die Durchsenkung $w_i = 0$ sein muss.

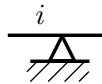


Abbildung 3.7: Festlager mit Sprunggröße $F_{Q,i}^s$

Elastisch senkbare Stütze

Eine elastisch senkbare Stütze (Abb. 3.8) wird über eine Feder mit der Federsteifigkeit $k_{w,i}$ modelliert, welche um den Weg w_i gedehnt oder gestaucht werden kann. Die Querkraft $F_{Q,i}^s$ berechnet sich mit:

$$F_{Q,i}^s = -k_{w,i} w_i.$$

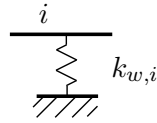


Abbildung 3.8: Elastische Stütze mit Sprunggröße $F_{Q,i}^s$

Elastisch drehbare Stütze

Eine elastisch drehbare Stütze (Abb. 3.9) erlaubt eine Rotation um den Winkel φ_i mit der Drehsteifigkeit $k_{\varphi,i}$. Der Weg w_i und die Querkraft F_Q bleiben unverändert. Die Sprunggröße M_i^s berechnet sich über:

$$M_i^s = -k_{\varphi,i} \varphi_i.$$



Abbildung 3.9: Elastische drehbare Stütze Sprunggröße M_i^s

Gelenk

Ein Gelenk (Abb. 3.10) erlaubt ebenfalls eine Rotation um den Winkel φ_i , jedoch ohne einen Drehwiderstand. Der Winkel φ_i^s geht als Sprunggröße in die Berechnung ein, die Größen w , M und F_Q sind unverändert.

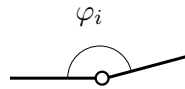


Abbildung 3.10: Gelenk mit Winkel φ_i^s als Sprunggröße

Herleitung der Punktmatrix für Biegung

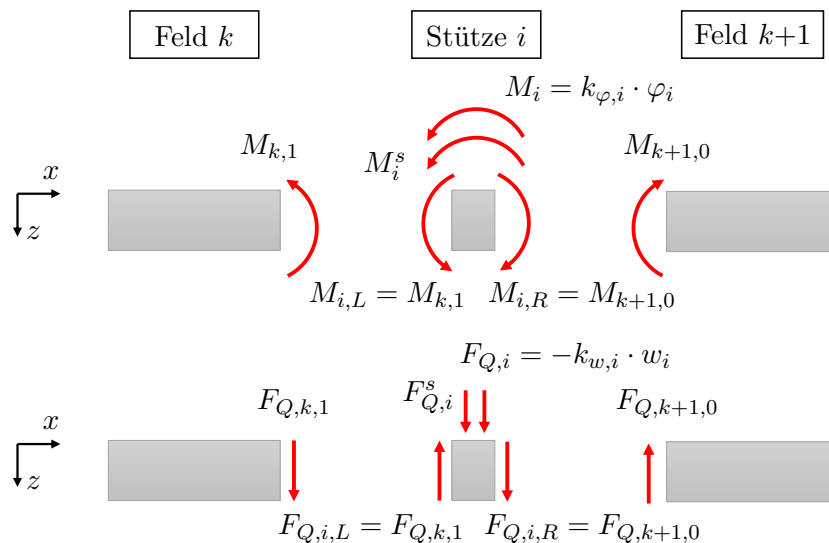


Abbildung 3.11: Freigeschnittener Träger und Stütze mit Schnittkräften (vgl. [59])

Ausgehend von den beschriebenen Arten von Unstetigkeitsstellen sollen hierfür die notwendigen Punktmatrizen hergeleitet werden. Hierfür wird der Träger unmittelbar vor und nach der Unstetigkeitsstelle freigeschnitten und alle wirkenden Kräfte und Momente werden aufgetragen (siehe Abb. 3.11).

Für das Kräftegleichgewicht für die Querkraft an der Stütze i gilt:

$$F_{Q,i,L} - F_{Q,i,R} - F_{Q,i} - F_{Q,i}^s = 0.$$

Für die Querkraft im Feld $k+1$ ergibt sich somit:

$$F_{Q,k+1,0} = F_{Q,k,1} - k_{w,i} w_i + F_{Q,i}^s. \quad (3.13)$$

Analog zur Querkraft $F_{Q,k+1}$ können auf gleiche Weise die Kinematik bzw. das Momentengleichgewicht für $w_{k,I}$, $\varphi_{k,I}$ und $M_{k,I}$ aufgestellt werden. Es folgt das Gleichungssystem 3.14:

$$\begin{aligned} w_{k+1,0} &= w_{k,1} + w_i^s, \\ \varphi_{k+1,0} &= \varphi_{k,1} + \varphi_i^s, \\ M_{k+1,0} &= -k_{\varphi,i} \cdot \varphi_{k,1} + M_{k,1} + M_i^s, \\ F_{Q,k+1,0} &= -k_{w,i} \cdot w_{k,1} + F_{Q,k,1} + F_{Q,i}^s. \end{aligned} \quad (3.14)$$

In Matrixschreibweise zusammengefasst lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} w_{k+1,0} \\ \varphi_{k+1,0} \\ M_{k+1,0} \\ F_{Q,k+1,0} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w_i^s \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \varphi_i^s \\ 0 & -k_{\varphi,i} & 1 & 0 & M_i^s \\ -k_{w,i} & 0 & 0 & 1 & F_{Q,i}^s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k,1} \\ \varphi_{k,1} \\ M_{k,1} \\ F_{Q,k,1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

oder in Kurzform:

$$\mathbf{z}_{b,k+1,0} = \mathbf{P}_{b,i} \cdot \mathbf{z}_{b,i,1}.$$

Punktmatrix für Längsverschiebung

Analog zur Herleitung der Punktmatrix für Biegung kann die Punktmatrix für Längsverschiebung hergeleitet werden. Hierfür wird die Stütze wie in Abbildung 3.11 dargestellt freigeschnitten, es werden jedoch alle längswirkenden Kräfte angetragen. Ein Kräftegleichgewicht sowie eine Umformulierung in Matrixschreibweise liefert die Punktmatrix $\mathbf{P}_{n,i}$ für Längsverschiebung:

$$\mathbf{P}_{n,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_i^s \\ -k_{u,i} & 1 & F_{N,i}^s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Zusammenfassen in einer Matrix

Die Punktmatrizen für Biegung (Gleichung 3.15) sowie für Längsverschiebung (Gleichung 3.16) lassen sich zu einer Matrix zusammenfassen. Je nach Art der Lagerung müssen nicht benötigte Koeffizienten zu Null gesetzt werden:

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_i^s \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_i^s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \varphi_i^s \\ 0 & 0 & -k_{\varphi,i} & 1 & 0 & 0 & M_i^s \\ -k_{u,i} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & F_{N,i}^s \\ 0 & -k_{w,i} & 0 & 0 & 0 & 1 & F_{Q,i}^s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Knicke im Verlauf des Trägers

In Abbildung 3.12 ist schematisch ein Knick im Verlauf des Trägers dargestellt. Dieser Knick stellt ebenfalls eine Unstetigkeitsstelle dar, welche über eine Punktmatrix in der Berechnung abgebildet werden kann [48].

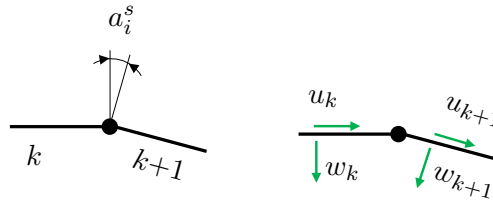


Abbildung 3.12: Knick im Träger mit eingetragenen Sprungrößen

Mit der Punktmatrix \mathbf{T} aus Gleichung 3.18 werden die Verschiebungen u und w , sowie die Schnittkräfte F_N und F_Q auf ein neues lokales Koordinatensystem transformiert. Das Biegemoment M und der Drehwinkel φ bleiben unverändert. Es gilt:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_i} \cdot \mathbf{z}_k \quad (3.18)$$

sowie

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{z}_k.$$

Betrachtung am ganzen Tragwerk

Die Abbildung 3.13 zeigt einen beliebig gestützten, unverzweigten Träger mit n Feldern und $n - 1$ Unstetigkeitsstellen. Es sollen die Zustandsgrößen rechts neben jeder Stütze ($\mathbf{z}_{k,0}$) ermittelt werden. Die Feldmatrizen und Punktmatrizen sind bekannt.

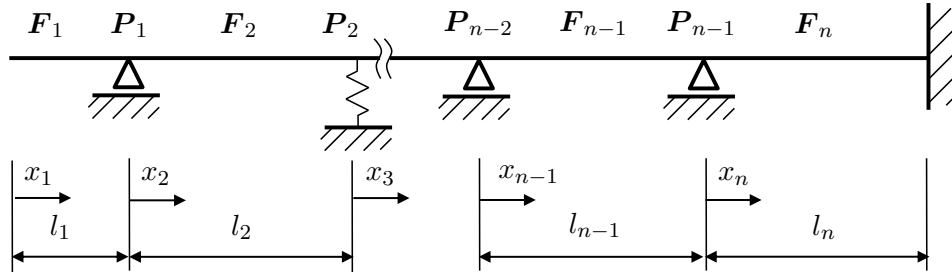


Abbildung 3.13: Beliebiger gestützter Durchlaufträger mit Benennung der Felder, Punkte sowie der lokalen Koordinatensysteme (vgl. [59])

Als Anfangsvektor \mathbf{z}_0 wird der Zustandsvektor am Startpunkt des Hauptstranges bezeichnet. Dieser wird immer mit einem einzelnen Index 0 bezeichnet und kann mit den Randbedingungen aus Tabelle 3.2 aufgestellt werden:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 = 0 \\ F_{N,0} = 0 \\ F_{Q,0} = 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tabelle 3.2: Lagerarten mit Randbedingungen und Freigrößen (vgl. [5])

Lager	Randbedingungen	Freigrößen
Festlager	$u = 0$	F_N
	$w = 0$	F_Q
	$M = 0$	φ
Feste Einspannung	$u = 0$	F_N
	$w = 0$	F_Q
	$\varphi = 0$	M
Freies Ende	$F_N = 0$	u
	$F_Q = 0$	w
	$M = 0$	φ

Der gesuchte Zustandsvektor rechts der ersten Unstetigkeitsstelle ergibt sich durch die Multiplikation mit der Feld- und Punktmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{2,0} &= \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{F}_{1,1} \cdot \mathbf{z}_0, \\ \mathbf{z}_{3,0} &= \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{F}_{2,1} \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{F}_{1,1} \cdot \mathbf{z}_0, \\ &\vdots \\ \mathbf{z}_{n+1,0} &= \mathbf{F}_{n,1} \cdot \mathbf{P}_{n-1} \cdot \mathbf{F}_{n-1,1} \dots \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{F}_{2,1} \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{F}_{1,1} \cdot \mathbf{z}_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Die Multiplikation der Feld- und Punktmatrizen ergibt somit die Produktmatrix \mathbf{U} des gesamten Trägers:

$$\mathbf{U} = \mathbf{F}_{n,1} \cdot \mathbf{P}_{n-1} \cdot \mathbf{F}_{n-1,1} \dots \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{F}_{2,1} \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{F}_{1,1}. \quad (3.20)$$

Nach Lösen des Gleichungssystems 3.21 durch ein geeignetes Verfahren ist der Anfangsvektor bestimmt:

$$\mathbf{z}_{n+1,0} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{z}_0. \quad (3.21)$$

Durch schrittweises Einsetzen in Gleichung 3.19 können die Zustandsvektoren links und rechts neben den Unstetigkeitsstellen berechnet werden. Mit den Gleichungen 3.5 können die Kraft- und Deformationsverläufe des Einzelfeldes bestimmt werden.

3.2 Theorie des Übertragungsmatrizenverfahrens bei verzweigten Tragwerken

In Abschnitt 3.1 wurden die Grundlagen des Übertragungsmatrizenverfahrens beschrieben, sowie die Anwendung auf mehrfach gelagerte, jedoch unverzweigte Träger. In diesem Kapitel sollen verzweigte Tragwerke und deren Berechnung betrachtet werden.

Eine Verzweigung wird in einen Hauptstrang und einen Nebenstrang unterteilt. Der Nebenstrang wird als eine Federsteifigkeit betrachtet, die im Hauptstrang als zusätzlicher Widerstand gegen Verformung wirkt. Im Folgenden soll die Modellierung der Verzweigung betrachtet werden.

3.2.1 Modellierung der Verzweigung als dreh- und dehnbare Feder

Das ebene offene Rahmentragwerk in Abbildung 3.14 besteht aus einem in vier Felder geteilten Hauptstrang und vier Stützen, die über eine sogenannte Anfederung in der Berechnung berücksichtigt werden sollen.

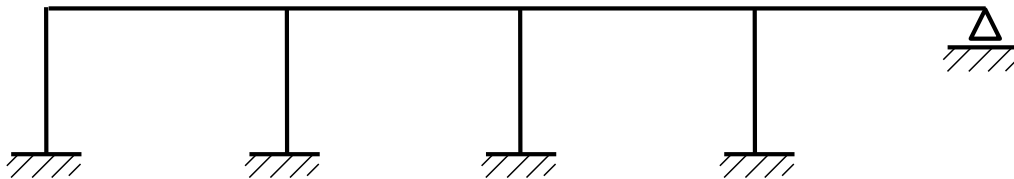


Abbildung 3.14: Ebenes offenes Rahmentragwerk (vgl. [59])

3. Theorie des Übertragungsmatrizenverfahrens

Im Folgenden soll die Anfederung von beidseitig fest eingespannten, vertikalen Stützen mit endlicher Steifigkeit betrachtet werden. Die Federmatrizen für weitere Anbindungsarten wie z. B. einseitig gelenkig gelagerte Stützen können analog hergeleitet oder der Literatur [59] entnommen werden.

Zur Herleitung der gesuchten Federmatrizen wird die in Abbildung 3.15 dargestellte Stütze einzeln betrachtet.

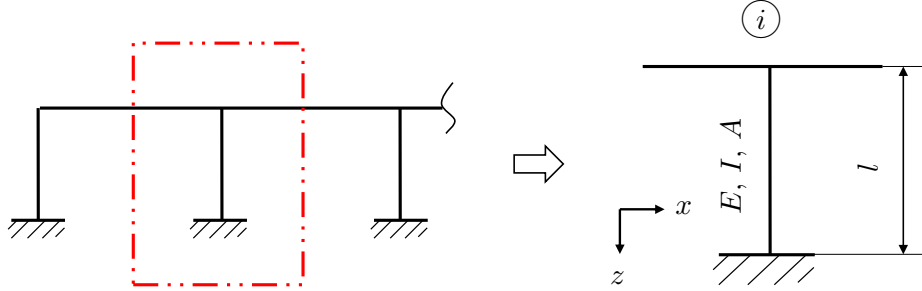


Abbildung 3.15: Fest eingespannte Stütze von horizontal verschieblichen Durchlaufrahmen bei Berücksichtigung der Dehnsteifigkeit der Stütze

Die Stütze am Knoten i hat die Länge l , den E-Modul E , das Flächenträgheitsmoment I und die Querschnittfläche A . Am Verbindungspunkt zwischen der Stütze und dem Hauptträger, der als Knoten bezeichnet wird, treten die Schnittkräfte und -momente \mathbf{F}_i^k auf. Der hochgestellte Index k kennzeichnet, dass die Schnittreaktion am Knoten auftritt. Der Index i beschreibt den Knoten, an welchem diese auftritt:

$$\mathbf{F}_i^k = \begin{bmatrix} F_{N,i}^k \\ F_{Q,i}^k \\ M_i^k \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Die Schnittkräfte und -momente setzen sich aus drei Anteilen zusammen, die superponiert werden. Der Anteil der Durchsenkung ist in Abbildung 3.16 dargestellt. Die Verschiebung in z -Richtung erzeugt eine Längsdehnung-/stauchung der Stütze. Mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes lässt sich die Normalkraft direkt berechnen.

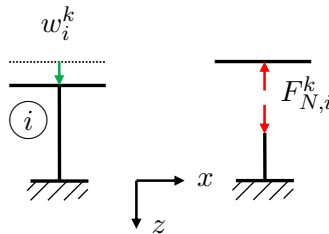


Abbildung 3.16: Anteil der Durchsenkung der Stütze auf die Knotenkraft (vgl. [59])

Der Normalkraftanteil $F_{N,i}^k$ der Knotenkraft bei vertikaler Verschiebung w_i^k mit $u_i^k = 0$ und $\varphi_i^k = 0$ berechnet sich zu:

$$F_{N,i}^k = -\frac{EA}{l} w_i^k. \quad (3.23)$$

Die Abbildung 3.17 zeigt den Anteil der Biegung. Eine Verschiebung des Trägers in x -Richtung bewirkt eine Biegung der Stütze. Die am Knoten bedingt durch die Stütze auftretenden Kräfte und Momente können über einen einseitig fest eingespannten Balken, welcher durch eine Einzelkraft belastet wird, berechnet werden.

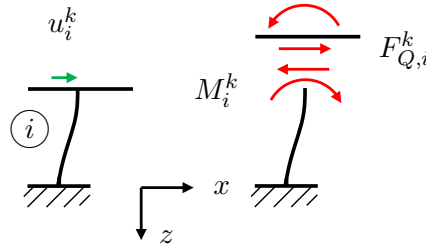


Abbildung 3.17: Anteil der Biegung der Stütze auf die Knotenkraft (vgl. [59])

Für die horizontale Verschiebung u_i^k mit $w_i^k = 0$ und $\varphi_i^k = 0$ berechnen sich das Moment und die Querkraft zu:

$$M_i^k = -\frac{6EI}{l^2}u_i^k,$$

und

$$F_{Q,i}^k = -\frac{12EI}{l^3}u_i^k.$$

In Abbildung 3.18 wird der Anteil durch Verdrehung dargestellt. Eine Verdrehung des Trägers bewirkt ein Moment am Kopf der Stütze. Die dadurch auftretenden Kräfte und Momente können über einen einseitig fest eingespannten Balken, welcher durch Moment belastet wird, berechnet werden.

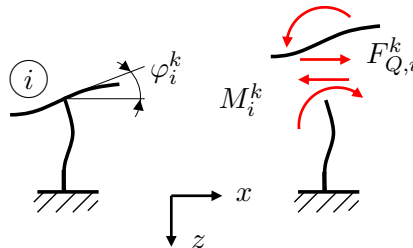


Abbildung 3.18: Anteil der Verdrehung der Stütze auf die Knotenkraft (vgl. [59])

Für die Verdrehung φ_i^k mit $w_i^k = 0$ und $u_i^k = 0$ berechnen sich das Moment und die Querkraft zu:

$$M_i^k = -\frac{4EI}{l}\varphi_i^k,$$

und

$$F_{Q,i}^k = -\frac{6EI}{l^2}\varphi_i^k.$$

3. Theorie des Übertragungsmatrizenverfahrens

Die Schnittkräfte und -momente aus der Stütze werden zu

$$F_{N,i}^k = -\frac{EA}{l}w_i^k = F_{Q,k},$$

$$F_{Q,i}^k = -\frac{12EI}{l^3}u_i^k - \frac{6EI}{l^2}\varphi_i^k = F_{N,k}$$

und

$$M_i^k = -\frac{6EI}{l^2}u_i^k - \frac{4EI}{l}\varphi_i^k = M_k$$

zusammengefasst und in Matrizenform geschrieben

$$\begin{bmatrix} F_Q^k \\ F_N^k \\ M^k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & F_{Q,i}^{k0} \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & F_{N,i}^{k0} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l} & M_i^{k0} \end{bmatrix}}_{\text{Federmatrix } \mathbf{K}^*} \cdot \begin{bmatrix} w^k \\ u^k \\ \varphi^k \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Neben den Reaktionskräften und -momenten der Stütze enthält die gesuchte Federmatrix \mathbf{K}^* die Erweiterung um eine Lastspalte mit den Einträgen für die Kräfte und Momente $F_{N,i}^{k0}$, $F_{Q,i}^{k0}$ und M_i^{k0} . Über diese Kräfte und Momente können äußere Lasten auf den Knoten aufgebracht werden. In Abbildung 3.19 sind die Kräfte und Momente und deren Wirkrichtung dargestellt.

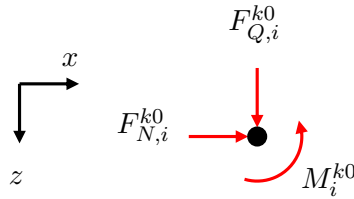


Abbildung 3.19: Kräfte und Momente auf Knoten zur Modellierung von äußeren Lasten

Mit den Einträgen der Federmatrix \mathbf{K}^* wird die Punktmatrix $\mathbf{P}_{S,i}$ zum Anfedern von vertikalen Stützen abgeleitet:

$$\mathbf{P}_{S,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{4EI}{l} & 1 & 0 & 0 & M_i^{k0} \\ -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 1 & 0 & F_{N,i}^{k0} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 1 & F_{Q,i}^{k0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Über die Gleichung 3.26 werden die Reaktionsgrößen der Stütze in das globale Koordinatensystem gedreht. Zu Beachten ist, dass ebenfalls die äußeren Lasten in das globale Koordinatensystem gedreht werden:

$$\mathbf{P}_{S,i}^{xz} = \mathbf{T}_{S,i}^T \cdot \mathbf{P}_{S,i} \cdot \mathbf{T}_{S,i} \quad (3.26)$$

sowie

$$\mathbf{P}_{S,i}^{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{32,xz} & s_{31,xz} & s_{33,xz} & 1 & 0 & 0 & M_{I,xz}^k \\ s_{22,xz} & s_{21,xz} & s_{23,xz} & 0 & 1 & 0 & F_{N,I,xz}^k \\ s_{12,xz} & s_{11,xz} & s_{13,xz} & 0 & 0 & 1 & F_{Q,I,xz}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \quad (3.27)$$

Die Abbildung 3.20 zeigt in a) die betrachtete Stütze und in b) das abgeleitete Ersatzsystem. Die Einzelfedersteifigkeiten $k_{u,i}$, $k_{w,i}$ und $k_{\varphi,i}$ werden mit den zugehörigen Koppelsteifigkeiten über die Federmatrix \mathbf{K}^* abgebildet, welche in der Punktmatrix $\mathbf{P}_{S,i}$ bzw. $\mathbf{P}_{S,i}^{xz}$ enthalten sind.

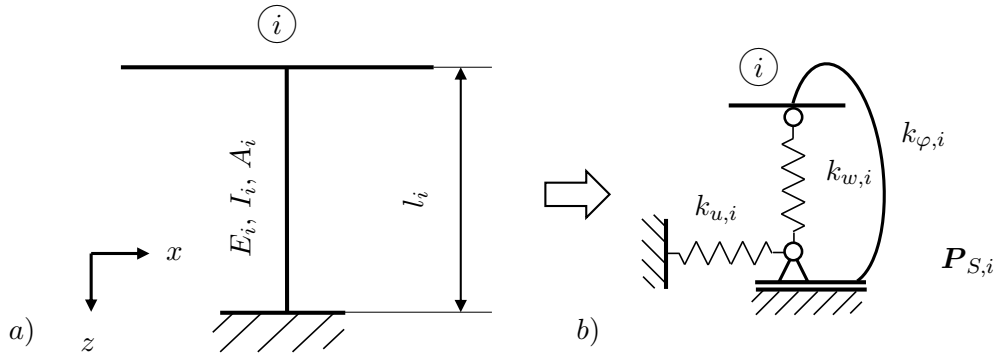


Abbildung 3.20: Symbol für Anfederung der fest eingespannten Stütze mit endlicher Längssteifigkeit und horizontal beweglichem Träger

3.2.2 Berechnung von verzweigten Tragwerken mit dem Übertragungsmatrizenverfahren

In der Literatur sind unterschiedliche Methoden zur Berechnung verzweigter Tragwerke zu finden. Während nach Kersten [59] auch verzweigte Rahmentragwerke ausschließlich mit dem Übertragungsmatrizenverfahren berechnet werden können, ist dies bei Verzweigung nach Graf und Vassilev [48], Kindmann und Kraus [60] und Riemer, Wauer und Wedig [95] nicht möglich.

Im Folgenden soll die Berechnung eines Rahmentragwerks ausschließlich nach dem Übertragungsmatrizenverfahren erfolgen.

Unterteilung in Haupt- und Nebenstrang

Zunächst wird das Rahmentragwerk in einen Hauptstrang und mehrere Nebenstränge unterteilt, wobei der Hauptstrang möglichst viele Felder und die Nebenstränge möglichst wenig Felder enthalten sollen. Entgegen dem Hauptstrang erfolgt die Modellierung des Nebenstrangs über eine Vereinfachung als Feder. Diese Modellbildung als senk-, dreh- und dehnbare Stützen wird als Anfedern des Nebenstrangs bezeichnet [59].

Das entstehende Ersatzsystem besteht somit aus dem unveränderten Hauptstrang und elastisch senk-, dreh- und dehnbaren Lagern an den Anbindungspunkten der Stützen.

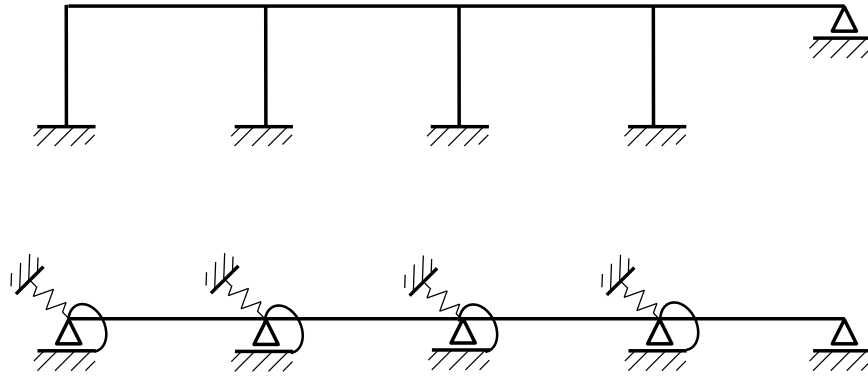


Abbildung 3.21: Ebenes offenes Rahmentragwerk. Die Nebenstränge werden als elastisch dreh- und dehnbare Stützen an den Hauptstrang angefedert. (vgl. [59])

Produktmatrix des Hauptstrangs

Die Produktmatrix \mathbf{U} ist entsprechend der Gleichung 3.20 aufzustellen, wobei die Feldmatrizen $\mathbf{F}_{k,x}$ mit der Gleichung 3.12 ermittelt werden können. Die Grundgleichung für die Punktmatrizen $\mathbf{P}_{S,i}^{xz}$, welche an den Lagerstellen die Felder verbinden, ist die Gleichung 3.17. Zusätzlich wird der Widerstand des Nebenstrangs gegen Verformung durch die Steifigkeiten aus Gleichung 3.25 in die Punktmatrix aufgenommen.

Das Aufstellen der Produktmatrix \mathbf{U} soll anhand des in Abbildung 3.22 dargestellten Tragwerkes gezeigt werden. Das Tragwerk entspricht dem in Abbildung 3.21, wird jedoch um eine Kraft zwischen den Lagern 3 und 5 erweitert.

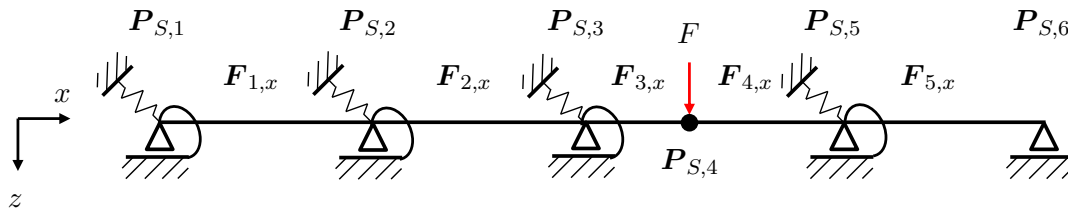


Abbildung 3.22: Abgeändertes, ebenes, offenes Rahmentragwerk mit eingezeichneten Punkt- und Feldmatrizen

Die Produktmatrix \mathbf{U} berechnet sich zu:

$$\mathbf{U} = \mathbf{P}_{S,6} \cdot \mathbf{F}_{5,1} \cdot \mathbf{P}_{S,4} \cdot \mathbf{F}_{4,1} \cdot \mathbf{P}_{S,4} \cdot \mathbf{F}_{3,1} \cdot \mathbf{P}_{S,3} \cdot \mathbf{F}_{2,1} \cdot \mathbf{P}_{S,2} \cdot \mathbf{F}_{1,1} \cdot \mathbf{P}_{S,1} \cdot$$

Die einzelnen Matrizen sind mit den Kennwerten des Tragwerkes zu berechnen:

- Die Punktmatrizen $\mathbf{P}_{S,1}$, $\mathbf{P}_{S,2}$, $\mathbf{P}_{S,3}$, $\mathbf{P}_{S,5}$ und $\mathbf{P}_{S,6}$ können direkt mit der Gleichung 3.25 berechnet werden, da alle Stützen gegenüber dem globalen Koordinatensystem nicht verdreht sind. Hierfür sind die Parameter E_i , I_i , A_i und l_i für die jeweilige Stützen einzusetzen. Die Einträge für Kräfte und Momente $F_{N,i}^{k0}$, $F_{Q,i}^{k0}$ und M_i^{k0} werden zu Null gesetzt, da keine äußeren Lasten aufgebracht werden sollen.
- Mittels der Punktmatrix $\mathbf{P}_{S,4}$ wird die Kraft F aufgebracht. Die Kraft F zeigt in die positive z -Richtung und wird somit über den Eintrag für die Querkraft $F_{Q,i}^{k0}$ berücksichtigt (Vergleiche Abb. 3.25). Alle verbleibenden Einträge für Steifigkeiten, Kräfte und Momente werden zu Null gesetzt.
- Die Feldmatrizen $\mathbf{F}_{1,1}$, $\mathbf{F}_{2,1}$, $\mathbf{F}_{3,1}$, $\mathbf{F}_{4,1}$ und $\mathbf{F}_{5,1}$ werden über die Gleichung 3.12 berechnet. Hierbei werden wieder die Parameter E_k , I_k , A_k sowie für die Koordinate x_k die Länge l_k des jeweiligen Feldes eingesetzt.

Das weitere Vorgehen zur Berechnung der Zustandsvektoren wird in Abschnitt 4.3.1 an einem weiteren Beispiel beschrieben.

3.3 Theorie des Deformationsverfahrens bei verzweigten Tragwerken

Die Beschreibung des Verfahrens orientiert sich an Graf und Vassilev [48]. Beim Deformationsverfahren wird über die Systemsteifigkeitsmatrix, die Randschnittkräfte und den Lastvektor der Verschiebungsvektor für jeden frei beweglichen Knoten berechnet.

Dafür werden zunächst die unbekannten Knotenverschiebungen in einem Vektor \mathbf{u}^{xz} zusammengefasst. Mit Hilfe der Submatrizen werden daraufhin die Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_e aufgestellt. Die ins globale Koordinatensystem transformierten Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_e werden zu einer Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} zusammengefasst. Im Vektor \mathbf{P}^{xz} werden alle äußeren Lasten auf die frei beweglichen Knoten eingetragen. Der Vektor der Randschnittkräfte bei kinematisch bestimmter Lagerung \mathbf{F}_0^{xz} kann über Tabellen bestimmt werden. Aus den aufgestellten Matrizen und Vektoren folgt ein Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannten Knotenverschiebungen. Im Folgenden sollen nur die Grundschrirte beschrieben werden, während in den Abschnitten 4.3.2 und 4.3.3 das Verfahren auf zwei Beispiele angewandt wird.

3.3.1 Diskretisierung

Es wird ein ebener Balken betrachtet (siehe Abb. 3.23). Die Feldgrenzen eines Stabes oder Balkens werden mit den Indizes 0 und 1 bezeichnet. An den Rändern treten die Randschnittkräfte $\mathbf{F}_{k,0}$ und $\mathbf{F}_{k,1}$ sowie die Verschiebungen $\mathbf{u}_{k,0}$ und $\mathbf{u}_{k,1}$ auf. Werden die Größen ins globale Koordinatensystem transformiert, wird dies mit dem hochgestellten Index xz gekennzeichnet. Für die Verschiebungen, Kräfte und Momente an den Rändern gilt:

$$\mathbf{F}_{k,0}^{xz} = \begin{bmatrix} F_{1,k,0}^{xz} \\ F_{2,k,0}^{xz} \\ M_{k,0}^{xz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{k,1}^{xz} = \begin{bmatrix} F_{1,k,1}^{xz} \\ F_{2,k,1}^{xz} \\ M_{k,1}^{xz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{k,0}^{xz} = \begin{bmatrix} u_{1,k,0}^{xz} \\ u_{2,k,0}^{xz} \\ \varphi_{k,0}^{xz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{k,1}^{xz} = \begin{bmatrix} u_{1,k,1}^{xz} \\ u_{2,k,1}^{xz} \\ \varphi_{k,1}^{xz} \end{bmatrix}.$$

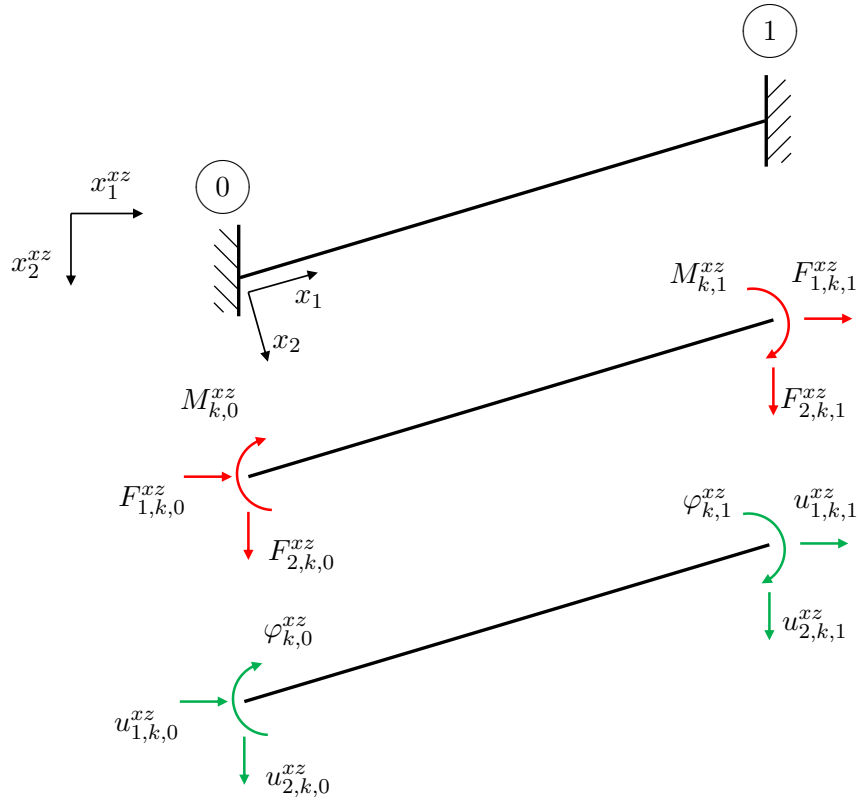


Abbildung 3.23: Balken mit Randverschiebungen und Randschnittkräften im globalen Koordinatensystem (vgl. [48])

3.3.2 Elementbeziehungen

Die Elementbeziehungen für ein Balkenelement lauten:

$$\mathbf{F}_{k,0} = \mathbf{F}_{0,k,0} + \mathbf{K}_{k,0,0} \cdot \mathbf{u}_{k,0} + \mathbf{K}_{k,0,1} \cdot \mathbf{u}_{k,1}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{F}_{k,1} = \mathbf{F}_{0,k,1} + \mathbf{K}_{k,1,0} \cdot \mathbf{u}_{k,0} + \mathbf{K}_{k,1,1} \cdot \mathbf{u}_{k,1} \quad (3.29)$$

und können im Vektor \mathbf{u}_k sowie im Vektor \mathbf{F}_k zusammengefasst werden:

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{0,k} + \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}_k.$$

Die Gleichungen 3.28 und 3.29 können über den Einheitsverschiebungszustand $\mathbf{u}_{k,0} = 1$ und $\mathbf{u}_{k,1} = 0$ hergeleitet werden.

Die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e besteht aus vier 3×3 -Submatrizen und gilt jeweils zwischen den Rändern 0 und 1.

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{k,0,0} & \mathbf{K}_{k,0,1} \\ \mathbf{K}_{k,1,0} & \mathbf{K}_{k,1,1} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Für den ebenen Fall gelten die Submatrizen 3.31 bis 3.34. Die Koeffizienten können über verschiedene Verfahren z. B. mittels der Steifigkeitszahlen berechnet werden [45].

$$\mathbf{K}_{k,0,0} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{K}_{k,0,1} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{K}_{k,1,0} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{K}_{k,1,1} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Zur Transformation vom lokalen ins globale Koordinatensystem werden Verschiebungen, Kräfte, Momente und Steifigkeitsmatrizen mit der Rotationsmatrix \mathbf{T} multipliziert. Es gilt:

$$\mathbf{u}^{xz} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u},$$

$$\mathbf{F}^{xz} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F},$$

$$\mathbf{K}^{xz} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{T},$$

mit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3.3 Knotengleichgewichtsbedingungen

Die Größe des zu lösenden Gleichungssystems ist abhängig von der Anzahl der Knoten, der frei beweglichen Knoten sowie der Verbindungen der Knoten untereinander. Das Ersatzsystem besteht insgesamt aus n Knoten, wobei n_f die höchste Nummer ist, die ein freier Knoten a annehmen kann. Eine Aufsummierung bis n_f erfolgt nur über die frei beweglichen Knoten a . Die Knoten mit Verschiebungen gleich Null werden als Stützknuten n_R bezeichnet. Die Verbindung zwischen einem frei beweglichen Knoten a und einem beliebigen Knoten b wird als Strecke \overline{ab} dargestellt. Zwei frei bewegliche Knoten a werden durch die Strecke \overline{a} gekennzeichnet.

Das Kräfte- und Momentengleichgewicht zwischen der Knotenbelastung \mathbf{P}^{xz} und den Randschnittschnittkräften \mathbf{F}^{xz} muss an jedem frei beweglichen Knoten a erfüllt sein. Jeder Knoten a liefert eine weitere Gleichung zum Gleichungssystem, welches im globalen Koordinatensystem angegeben wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_a^{xz} - \sum_{b=1}^n \mathbf{F}_{ab}^{xz} &= \mathbf{0}, \\ &\vdots \\ \mathbf{P}_{n_f}^{xz} - \sum_{b=1}^n \mathbf{F}_{n_f b}^{xz} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbf{F}_{ab} = \begin{cases} \mathbf{F}_{ab} & \text{wenn } \overline{ab} \text{ existiert} \\ \mathbf{0} & \text{wenn } \overline{ab} \text{ nicht existiert} \end{cases}.$$

Werden für die Randschnittkräfte \mathbf{F}^{xz} die Randschnittkräfte-Knotenverschiebungs-Abhängigkeiten aus den Gleichungen 3.28 und 3.28 eingesetzt ergeben sich allgemein das Gleichungssystem:

$$\mathbf{P}^{xz} - \mathbf{F}^{xz} = \mathbf{P}^{xz} - \mathbf{F}_0^{xz} - \mathbf{K}^{xz} \cdot \mathbf{u}^{xz} = \mathbf{0},$$

mit

- den äußeren Lasten auf die Knoten \mathbf{P}^{xz} ,
- den Randschnittkräften \mathbf{F}^{xz} ,
- der Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{xz} ,
- den unbekannte Knotenverschiebungen \mathbf{u}^{xz} ,
- den Randschnittkräften bei kinematisch bestimmter Lagerung \mathbf{F}_0^{xz} .

3.3.4 Steifigkeitsmatrizen und Randschnittkräfte

Für alle frei beweglichen Knoten folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{xz} - \mathbf{F}^{xz} &= \mathbf{P}_a^{xz} - \sum_{b=1}^n \mathbf{F}_{0,ab}^{xz} - \sum_{b=1}^n \mathbf{K}_{ab,a}^{xz} \cdot \mathbf{u}_a^{xz} - \sum_{m=1}^{n_f} \mathbf{K}_{am,m}^{xz} \cdot \mathbf{u}_m^{xz} = \mathbf{0}, \\ &\vdots \\ \mathbf{P}_{n_f}^{xz} - \sum_{b=1}^n \mathbf{F}_{0,n_f b}^{xz} - \sum_{b=1}^n \mathbf{K}_{n_f b,n_f}^{xz} \cdot \mathbf{u}_{n_f}^{xz} - \sum_{m=1}^{n_f} \mathbf{K}_{n_f m,m}^{xz} \cdot \mathbf{u}_m^{xz} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbf{F}_{0,ab} = \begin{cases} \mathbf{F}_{0,ab} & \text{wenn } \overline{ab} \text{ existiert} \\ \mathbf{0} & \text{wenn } \overline{ab} \text{ nicht existiert} \end{cases},$$

$$\mathbf{K}_{ab,a} = \begin{cases} \mathbf{K}_{ab,0} & \text{wenn } \overline{ab} \text{ existiert} \\ \mathbf{0} & \text{wenn } \overline{ab} \text{ nicht existiert} \end{cases}$$

und

$$\mathbf{K}_{am,m} = \begin{cases} \mathbf{K}_{am,m} & \text{wenn } \overline{ab} \text{ existiert} \\ \mathbf{0} & \text{wenn } \overline{ab} \text{ nicht existiert} \end{cases}.$$

Die Randschnittkräfte der frei beweglichen Knoten:

$$\mathbf{F}_0^{xz} = \begin{bmatrix} \sum_{b=1}^n \mathbf{F}_{0,ab}^{xz} \\ \vdots \\ \sum_{b=1}^n \mathbf{F}_{0,n_fb}^{xz} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

und die Verschiebungsvektoren:

$$\mathbf{u}^{xz} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a^{xz} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n_f}^{xz} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

werden in einem Vektor zusammenfasst.

Die Systemsteifigkeit wird aus den Elementsteifigkeitssubmatrizen 3.31 bis 3.34 zusammengesetzt. Hierbei befinden sich die summierten Steifigkeiten $\sum_{b=1}^n \mathbf{K}_{ab,a}^{xz}$ vom frei beweglichen Knoten a zu allen Nachbarknoten auf der Blockhauptdiagonalen. Auf den Nebendiagonalen werden die Steifigkeiten $\sum_{m=1}^{n_f} \mathbf{K}_{am,m}^{xz}$ zu den beweglichen Nachbarknoten eingetragen. Es ergibt sich die schwach besetzte Bandmatrix:

$$\mathbf{P} - \mathbf{F}_0 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.37)$$

In Gleichung 3.37 sind nur die Verschiebungen \mathbf{u} unbekannt, sodass durch Invertierung oder ein numerisches Verfahren das Gleichungssystem gelöst werden kann. Weiterhin lassen sich die Schnittreaktionen an den Knotenrändern über die Verschiebungen berechnen, sodass sich ein voll besetzter Zustandsvektor ergibt. Somit kann der Balken zwischen zwei Knoten als ein Feld betrachtet werden, welches in Kapitel 3.1.3 beschrieben wurde und mit Hilfe des Übertragungsmatrizenverfahrens berechnet werden.

3.4 Kombiniertes Verfahren

Im Folgenden soll eine Kombination der beiden Verfahren beschrieben werden. Beim kombinierten Verfahren werden Einzelstränge im Übertragungsmatrizenverfahren berechnet und als Makroelemente im Deformationsverfahren eingebunden. Die Beschreibung des Verfahrens orientiert sich ebenfalls an Graf und Vassilev [48].

Der bekannte Zusammenhang $\mathbf{z}_1 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{z}_0$ wird in Gleichung 3.38 in die Zustandsgrößen \mathbf{y}_0 und \mathbf{y}_1 sowie die Koeffizienten der Übertragungsmatrix $\alpha_{k,1}$ und die Lastspalte $\beta_{k,1}$ und die Identitätszeile zerlegt:

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{k,1} & \boldsymbol{\beta}_{k,1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{k,1} \cdot \mathbf{z}_0. \quad (3.38)$$

In Vorbereitung auf die Ableitung der vier Steifigkeitssubmatrizen wird in Gleichung 3.39 $\boldsymbol{\alpha}_{k,1}$ in die Submatrizen \mathbf{F}_1 bis \mathbf{F}_4 zerlegt. Die Zustandsvektoren \mathbf{y}_0 und \mathbf{y}_1 und die Lastspalte $\boldsymbol{\beta}_{k,1}$ werden nach den Weggrößen $\mathbf{y}_{0,1}$, $\mathbf{y}_{1,1}$ und \mathbf{f}_5 und den Kraftgrößen $\mathbf{y}_{0,2}$, $\mathbf{y}_{1,2}$ und \mathbf{f}_6 getrennt:

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,1} \\ \mathbf{y}_{1,2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 & \mathbf{f}_5 \\ \mathbf{F}_3 & \mathbf{F}_4 & \mathbf{f}_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{0,1} \\ \mathbf{y}_{0,2} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{z}_0. \quad (3.39)$$

Für den ebenen Fall gelten die Zustandsteilvektoren:

$$\mathbf{y}_{0,1} = \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{0,2} = \begin{bmatrix} M_0 \\ F_{Q,0} \\ F_{N,0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{1,1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{1,2} = \begin{bmatrix} M_1 \\ F_{Q,1} \\ F_{N,1} \end{bmatrix}.$$

Aus der Gleichung 3.39 werden die Steifigkeitssubmatrizen und die aus dem Abschnitt 3.3 bekannten Randschnittkräfte-Randverschiebungs-Abhängigkeiten abgeleitet:

$$\mathbf{F}_{k,0} = \mathbf{F}_{0,k,0} + \mathbf{K}_{k,0,0} \cdot \mathbf{u}_{k,0} + \mathbf{K}_{k,0,1} \cdot \mathbf{u}_{k,1}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{F}_{k,1} = \mathbf{F}_{0,k,1} + \mathbf{K}_{k,1,0} \cdot \mathbf{u}_{k,0} + \mathbf{K}_{k,1,1} \cdot \mathbf{u}_{k,1},$$

mit

$$\mathbf{K}_{k,0,0} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}_2^{-1} \cdot \mathbf{F}_1, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{K}_{k,0,1} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}_3 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}_4 \cdot \mathbf{F}_2^{-1} \cdot \mathbf{F}_1, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{K}_{k,1,0} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}_2^{-1}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{K}_{k,1,1} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}_4 \cdot \mathbf{F}_2^{-1}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{F}_{0,k,0} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}_2^{-1} \cdot \mathbf{f}_5, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{F}_{0,k,1} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{f}_6 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}_4 \cdot \mathbf{F}_2^{-1} \cdot \mathbf{f}_5. \quad (3.46)$$

und

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{k,0} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{y}_{0,2},$$

$$\mathbf{F}_{k,1} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{y}_{1,2}.$$

Mit den Sub-Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}_{k,0,0}$ bis $\mathbf{K}_{k,1,1}$ und den Randschnittkräften $\mathbf{F}_{0,k,0}$ und $\mathbf{F}_{0,k,1}$ kann ein mit dem Übertragungsmatrizenverfahren berechneter Balken oder Tragwerk als Makroelement in das in Abschnitt 3.3 vorgestellte Deformationsverfahren integriert werden. In Abschnitt 4.3.4 wird die Anwendung anhand eines Beispiels beschrieben.

3.5 Vergleich der vorgestellten Verfahren

Beide Verfahren unterscheiden sich deutlich in der Berechnung, während das Übertragungsmatrizenverfahren nahe an der analytischen Berechnung bleibt, gleicht die Vorgehensweise beim Deformationsverfahren dem einer klassischen FEM.

Der Einsatz des Übertragungsmatrizenverfahrens ist vor allem bei mehrfach verzweigten Tragwerken eingeschränkt. Die Forderung nach einem möglichst langen Hauptstrang ist besonders bei stark verzweigten Tragwerken wie dem Überrollkäfig nicht hinreichend einzuhalten. Der Vorteil einer erhöhten Genauigkeit durch direkte Verwendung der Differentialgleichungen für den Balken ist nur beim Hauptstrang gegeben. Der Nebenstrang wird nur durch einfache Federsteifigkeiten, dem sogenannten Anfedern berücksichtigt. Besonders bei den zu betrachtenden komplexen Strukturen wie dem Überrollkäfig ist meist kein eindeutiger Hauptstrang und ein weniger wichtiger Nebenstrang zu bestimmen.

Dass es sich beim Deformationsverfahren im Prinzip um eine klassische FEM handelt, wird vor allem bei den Steifigkeitsmatrizen sichtbar. Als Ergebnis des Verfahrens werden die Verschiebungen am Knoten ermittelt. Hierbei stellt das Übertragungsmatrizenverfahren eine Alternative zur Ermittlung der Zustandsgrößen über den Trägerverlauf dar. Der Vorteil gegenüber einer klassischen FEM mit höherwertigen Ansatzfunktionen oder kleineren Elementen bei linearen Ansatzfunktionen ist, dass sich die Zustandsgrößen kontinuierlich über den Trägerverlauf ergeben.

Beim kombinierten Verfahren wird ein Strang mit dem Übertragungsmatrizenverfahren berechnet und als Makroelement in das Deformationsverfahren eingebunden. Dadurch ergeben sich insbesondere bei Beaufschlagung mit Streckenlasten Vorteile, da diese im Übertragungsmatrizenverfahren direkt in den Feldmatrizen berücksichtigt werden können. Ein Anwendungsfall können gekrümmte Balkenstränge mit variablen Streckenlasten sein, die im Übertragungsmatrizenverfahren feldweise mit konstanten Parametern und Lasten angenähert werden und zur weiteren Verwendung als Makroelement abgeleitet werden. Diese Makroelemente können im Deformationsverfahren verwendet werden ohne die Komplexität der Anwendung des Verfahrens zu erhöhen.

Kapitel 4

Modellierung eines Balkentragwerkes mit dem Übertragungsmatrizenverfahren

In diesem Kapitel sollen beide Verfahren umgesetzt und mit einer FEM-Lösung verglichen werden. Als Berechnungsbeispiel werden die in Abbildung 4.1 dargestellten ebenen Tragwerke definiert, welche vereinfacht der Seiten- bzw. Vorderansicht eines ausgeführten Überrollkäftes entsprechen. Das links dargestellte Tragwerk wird mit dem Übertragungsmatrizen- und dem Deformationsverfahren berechnet. Beim rechts dargestellten Tragwerk soll ein kombiniertes Verfahren zum Einsatz kommen. Dabei wird im ersten Schritt der Bogen mit dem Übertragungsmatrizenverfahren berechnet und dieser im zweiten Schritt als Makroelement im Deformationsverfahren berücksichtigt.

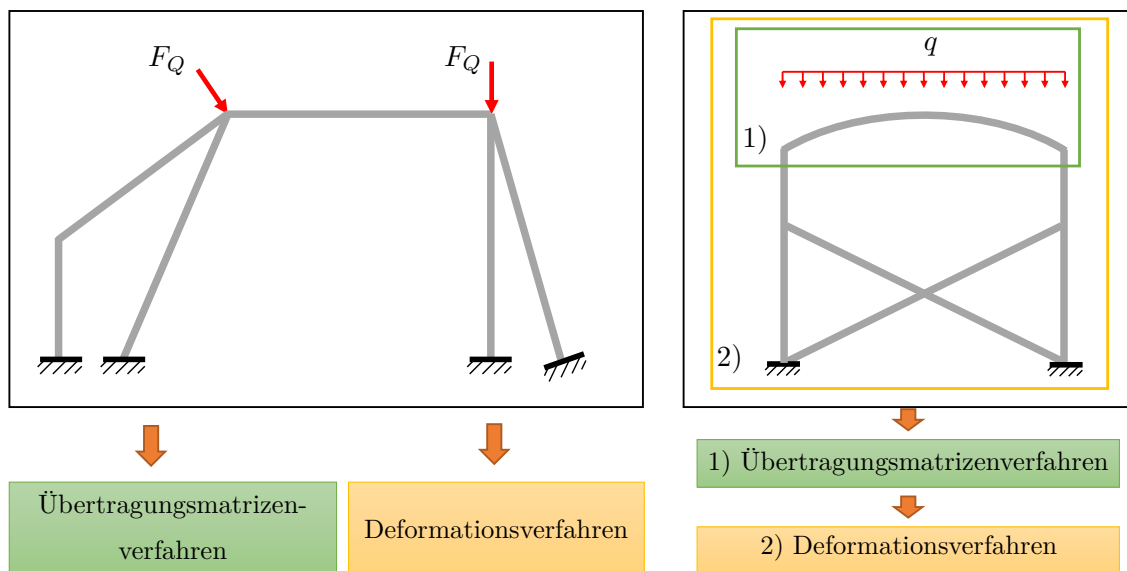


Abbildung 4.1: Übersicht der verwendeten Verfahren; Tragwerk links - Berechnung mit dem Übertragungsmatrizen- und dem Deformationsverfahren; Tragwerk rechts - Abschnitt 1) Berechnung mit dem Übertragungsmatrizenverfahren; Gesamtsystem 2) Berechnung mit dem Deformationsverfahren

4.1 Allgemeiner Ablauf der Berechnungsverfahren

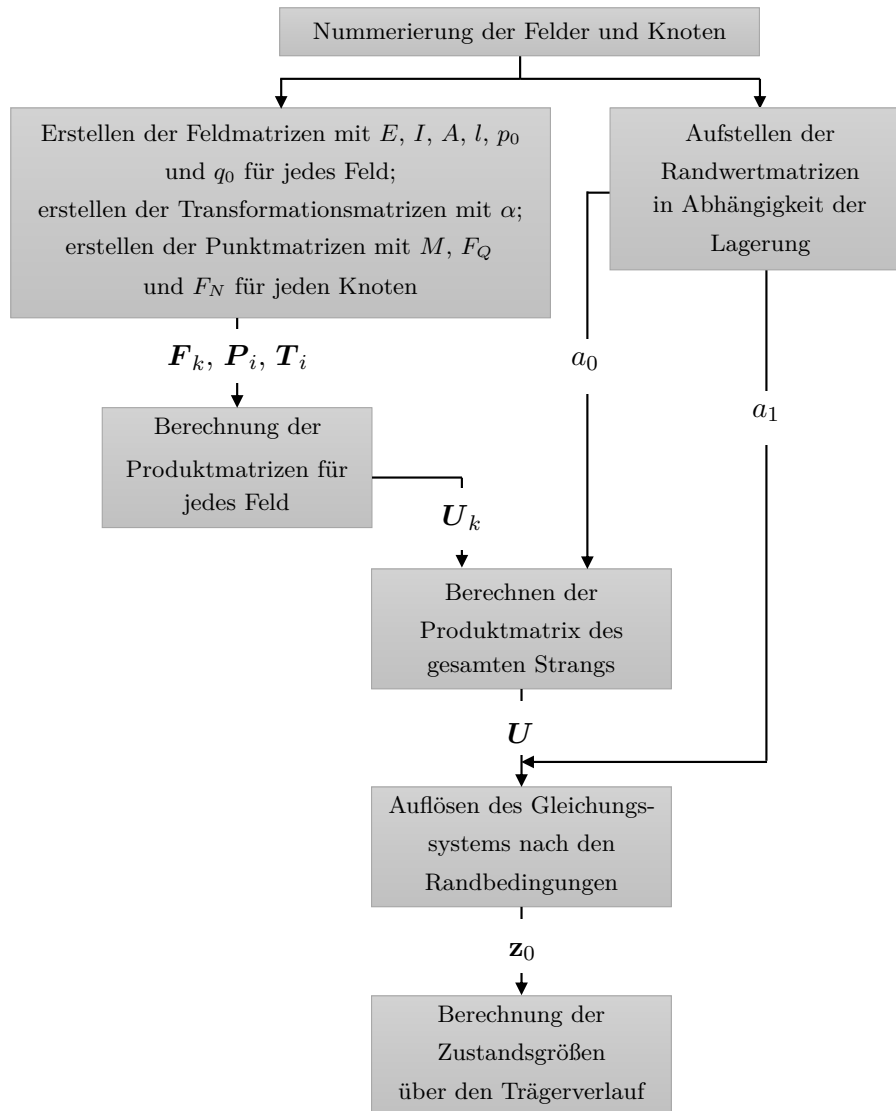


Abbildung 4.2: Ablaufplan zur Berechnung eines unverzweigten Trägers mit dem Übertragungsmatrizenverfahren

In Abbildung 4.2 ist der Ablauf zur Berechnung eines unverzweigten Tragwerkes mit dem Übertragungsmatrizenverfahren schematisch dargestellt. Der Ablaufplan kann, wenn jeweils drei Randbedingungen an den Feldgrenzen eines unverzweigten Trägerabschnitts gegeben sind, immer verwendet werden.

Die Punkt-/Transformationsmatrizen werden zur Einheitsmatrix, falls der Transformationswinkel $\alpha = 0^\circ$ beträgt, bzw. falls die Feldgrenze keine Unstetigkeitsstelle ist. Dadurch ergibt sich die Produktmatrix immer durch die Multiplikation der Feldmatrix mit der Punkt- und der Transformationsmatrix zu:

$$U_k = P_i \cdot T_i \cdot F_k. \quad (4.1)$$

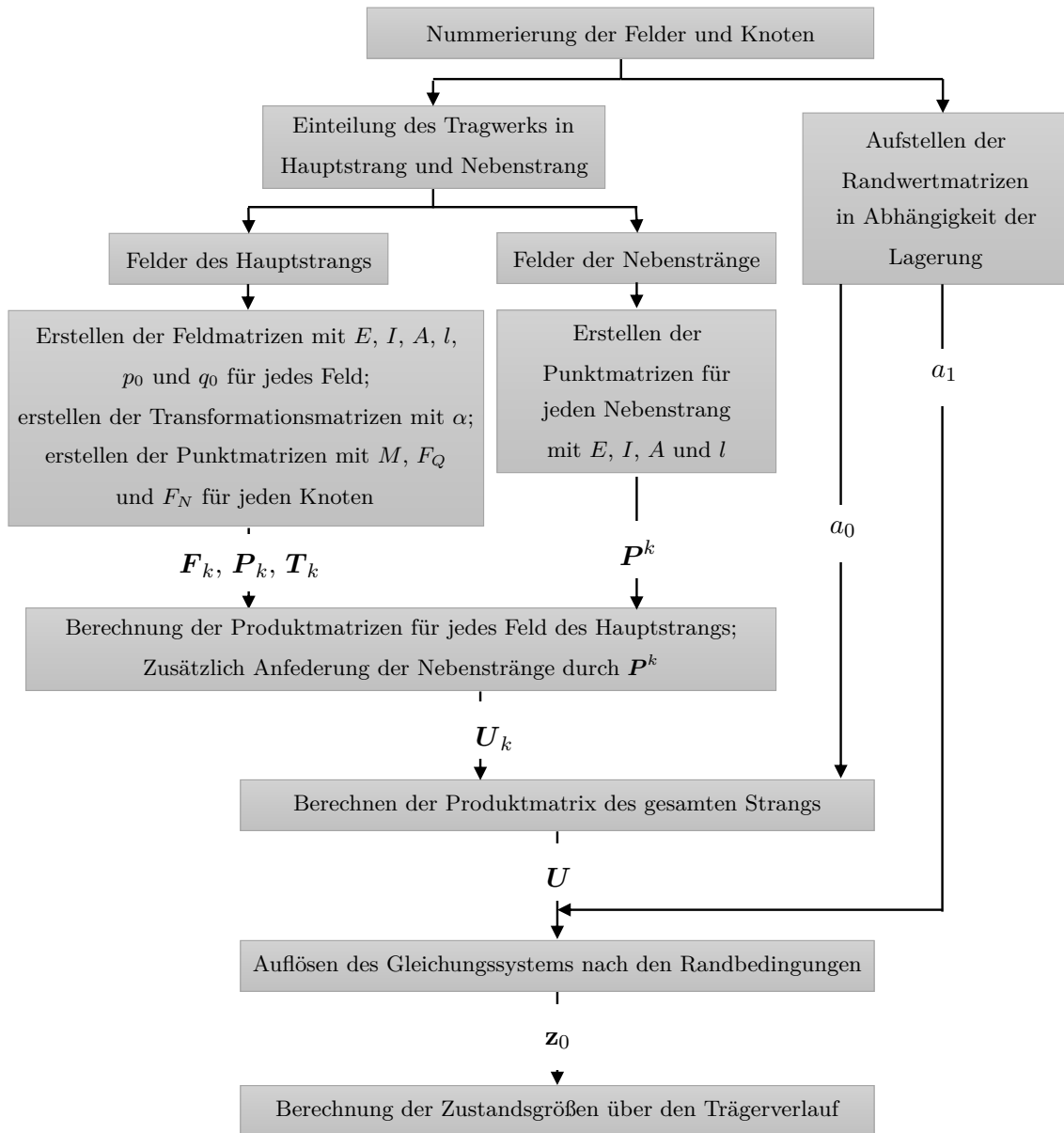


Abbildung 4.3: Ablaufplan zur Berechnung von Rahmentragwerken mit dem Übertragungsmatrizenverfahren

In Abbildung 4.3 ist der erweiterte Ablauf zur Berechnung von verzweigten Tragwerken dargestellt. Hierbei werden zunächst die Stränge in Haupt- und Nebenstrang eingeteilt. Für die Hauptstränge werden analog zum Verfahren für unverzweigte Tragwerke die Feldmatrizen sowie die Punkt- und Transformationsmatrizen und die zur Anfederung der Nebenstränge benötigten Punktmatrizen aufgestellt. Durch Multiplikation der Matrizen wird die Produktmatrix U_k für das Einzelfeld gewonnen, die wiederum zur Produktmatrix des Gesamtträgers U multipliziert werden. Der weitere Berechnungsablauf ist analog zum unverzweigten Träger.

4. Modellierung eines Balkentragwerkes mit dem Übertragungsmatrizenverfahren

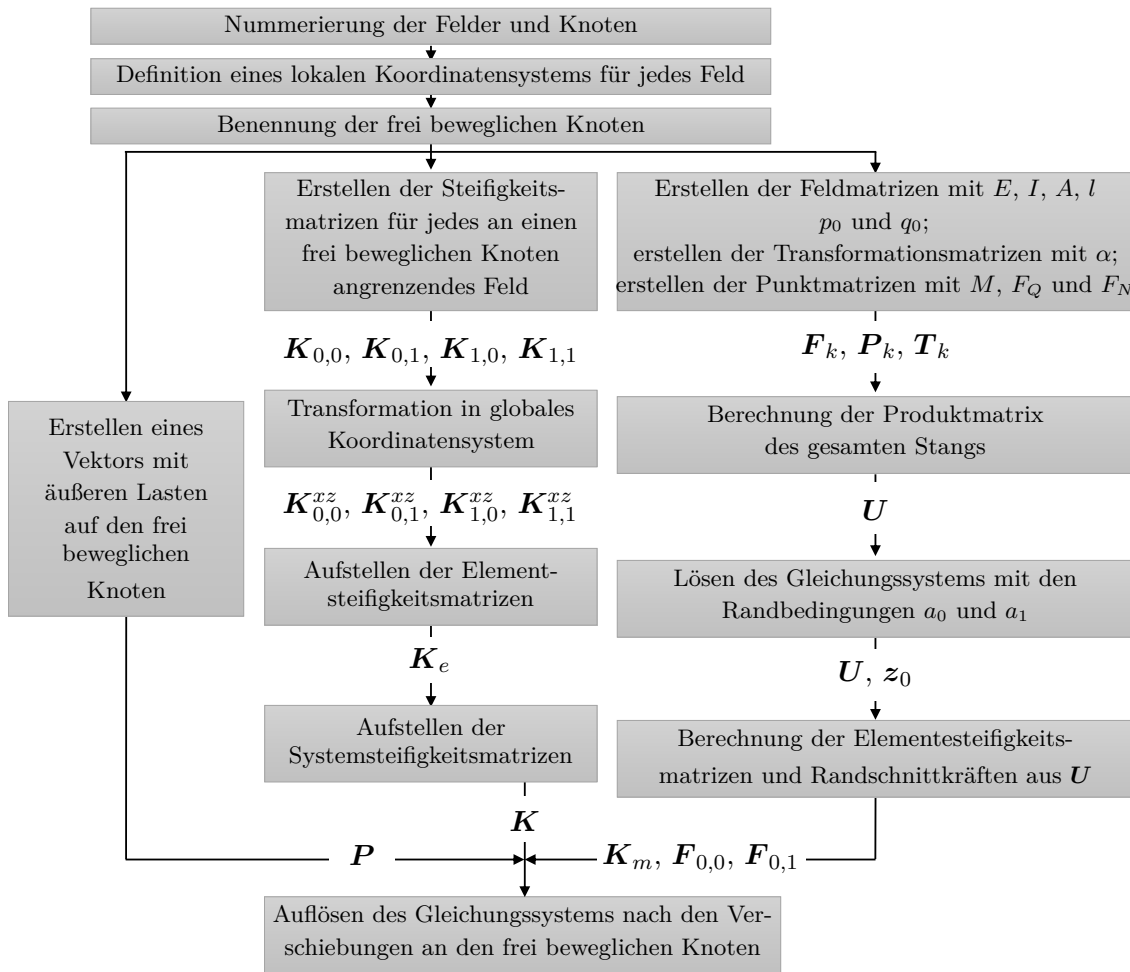


Abbildung 4.4: Ablaufplan zur Berechnung eines Rahmentragwerkes mit einem kombinierten Übertragungsmatrizen-/Deformationsverfahren

In Abbildung 4.4 ist der Ablauf zur Berechnung mittels eines kombinierten Übertragungsmatrizen-/Deformationsverfahrens dargestellt. Zunächst wird ein Strang definiert welcher als Makroelement zusammengefasst werden soll. Für diesen Strang werden analog zu den vorherigen Verfahren die Feld-, Punkt- und Transformationsmatrizen aufgestellt und aus diesen die Produktmatrix \mathbf{U} berechnet. Die Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_m und die Randschnittkräfte $\mathbf{F}_{0,0}$ und $\mathbf{F}_{0,1}$ am linken und rechten Rand werden wiederum aus der Produktmatrix \mathbf{U} abgeleitet. Für das restliche Tragwerk werden die Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_e aufgestellt und mit der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_m des Makroelementes zur Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} aufsummiert. Äußere Lasten auf die Knoten werden im Vektor \mathbf{P} die Randschnittkräfte im Vektor \mathbf{F}_0 zusammengefasst. Die Berechnung der gesuchten Größen erfolgt im letzten Schritt über die Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{P} - \mathbf{F}_0 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = 0$.

Auf die Darstellung des Ablaufdiagramms für ein reines Deformationsverfahren wird verzichtet, da dies dem in Abbildung 4.4 dargestellten Verfahren ohne dem Pfad zur Berechnung der Makroelemente entspricht.

4.2 Umsetzung der Algorithmen

Die Umsetzung der gezeigten Berechnungsverfahren erfolgt mittels der Software MATLAB. Der Berechnungsablauf ist wie in Abbildung 4.5 dargestellt in Unterfunktionen unterteilt.

Das Skript „preprocessing.m“ lädt die Excel-Dokumente mit den Eingangsdaten und berechnet mittels den Unterfunktionen „fieldMatrix.m“, „pointMatrix.m“ und „transformation.m“ die Übertragungs- und Punktmatrizen.

Soll das Tragwerk ausschließlich mit dem Übertragungsmatrizenverfahren berechnet werden, wird das Skript „spaceframe_UEMV.m“ ausgeführt, welches den Zustandsvektor mit den Randbedingungen sowie die Produktmatrix aufstellt und das entstehende Gleichungssystem löst.

Beim reinen Deformationsverfahren werden die Skripte „transformation_stiffnessMatrix.m“ und „spaceframe_DFV.m“ ausgeführt. Zunächst werden die Einzelsteifigkeiten transformiert und eine Systemsteifigkeitsmatrix gebildet, welche mit dem Lastvektor ein Gleichungssystem ergibt, dass nach den Verschiebungen gelöst wird. Soll das Tragwerk mit dem kombinierten Verfahren berechnet werden, wird zusätzlich mit dem Skript „macroelement.m“ für einen Teilbereich aus den Feld- und Punktmatrizen ein Makroelement erstellt und daraus eine Elementsteifigkeitsmatrix abgeleitet.

Die Schnittkraftverläufe lassen sich mit dem Skript „postprocessing.m“ ermitteln, indem mit den Verschiebungen und Randschnittkräften der Zustandsvektor aufgestellt wird und die gesuchten Größen mit dem Übertragungsmatrizenverfahren berechnet werden.

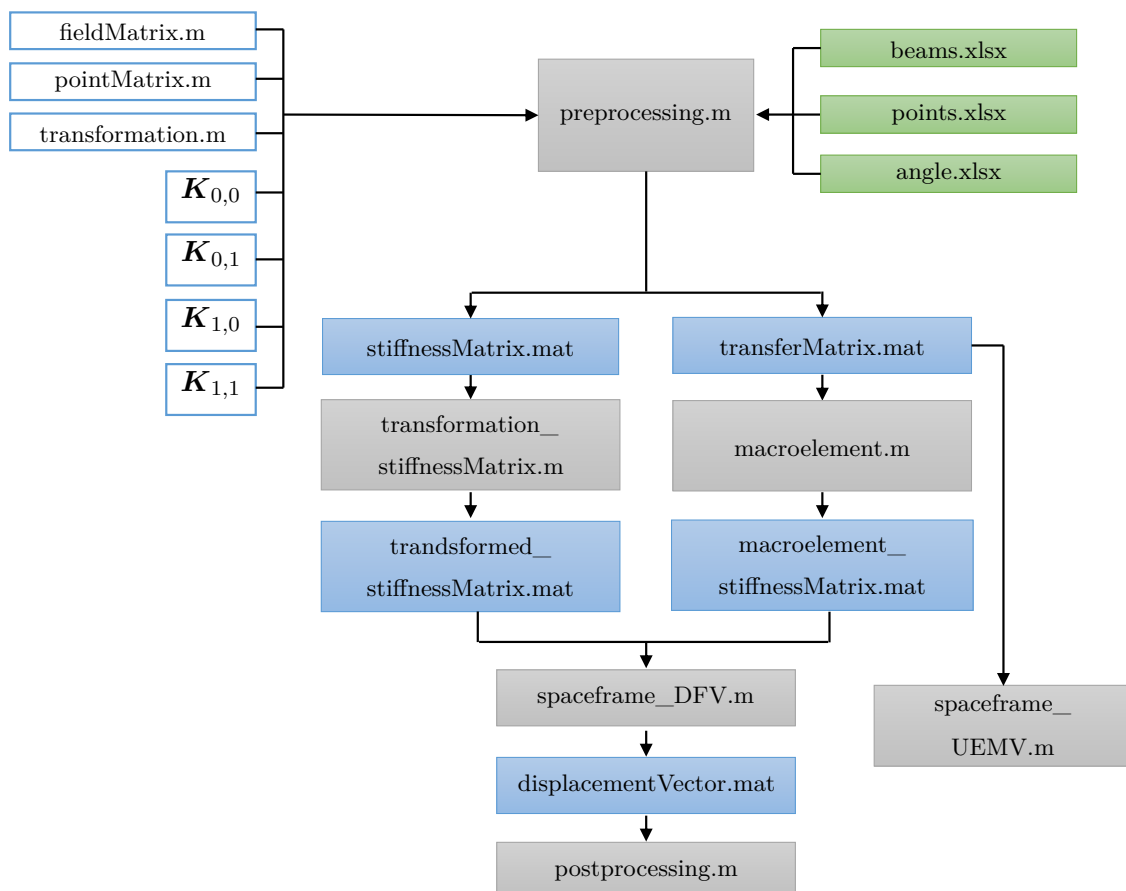


Abbildung 4.5: Ablauf der Skripte und Funktionen in MATLAB

4.3 Berechnung ausgewählter Lastfälle

Es soll ein ebenes Tragwerk definiert werden, das der Seitenansicht eines im Motorsport gebräuchlichen Überrollkäfts ähnelt. Das Tragwerk besteht aus einem durchgängigen Strang mit den Rohren [1], [3], [4] und [5] sowie den zusätzlichen Streben [2] und [6]. Diese Anordnung entspricht der Grundstruktur, welche in [40] beschrieben wird. Für das Tragwerk wird ein eigenständiger Lastfall definiert, welcher an beiden FIA-Lastfällen für die A-Säule (siehe Abb. 2.7) und B-Säule (siehe Abb. 2.8) angelehnt ist. Die Kraft $F_{Q,4}$ am Knoten (4), wirkt senkrecht auf den Balken [3] und die Kraft $F_{Q,5}$ am Knoten (5) steht senkrecht auf dem Balken [4]. Beide Kräfte werden als Querkraft in den Punktmatrizen berücksichtigt und werden somit mit dem Symbol F_Q bezeichnet. Für die Kräfte gilt: $F_{Q,4} = F_{Q,5} = 10 \text{ kN}$.

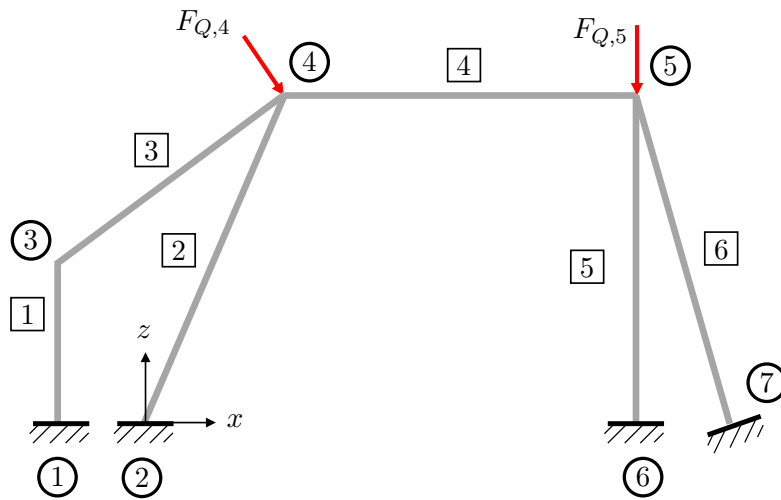


Abbildung 4.6: Vereinfachtes ebenes Rahmentragwerk mit eingetragenen Lasten

Die Tabelle 4.1 zeigt die Koordinaten des Tragwerkes. Der Koordinatenursprung befindet sich bei dem gewählten Beispiel im Punkt (2). Dieser kann willkürlich gewählt werden, da die weitere Berechnung hauptsächlich mit den lokalen Koordinaten durchgeführt wird.

Tabelle 4.1: Koordinaten des ebenen Rahmentragwerkes

Punkt [-]	Koordinaten [mm]	
	x	z
(1)	-50	0
(2)	0	0
(3)	-50	500
(4)	600	1000
(5)	1600	1000
(6)	1600	0
(7)	2100	0

In Tabelle 4.2 sind die aus den Koordinaten abgeleiteten Längen und Winkel der Einzelträger dargestellt. Die Balkennummerierung und die Länge der Balken sind für beide Verfahren gültig. Die Spalte α_{UEMV} gibt die Winkel für die Verwendung im Übertragungsmatrizenverfahren (Abkürzung UEMV) an. Diese beschreiben die Änderung des Winkels zum vorhergehenden Balken (siehe Abb. 4.7). Die Winkel für das Deformationsverfahren (Abkürzung DFV) sind in der Spalte α_{DFV} aufgeführt, welche der Rotation gegenüber der x -Achse entsprechen. Dies wird in Abbildung 4.8 dargestellt.

Tabelle 4.2: Länge und Winkel der Einzelträger des Rahmentragwerkes

Balken [-]	Länge [mm]	α_{UEMV} [°]	α_{DFV} [°]
1	500	0	90
2	1166	30	60
3	820	52	38
4	1000	38	296
5	1000	90	270
6	1118	-26	296

Neben der Geometrie werden noch die Parameter der Balken benötigt. Als Basis wird ein kreisrundes Rohr definiert, welches an den Bestimmungen der FIA [40] angelehnt ist. Als Material wird ein klassischer Baustahl gewählt. Soll ein höherfester Stahl berechnet werden, kann eine Anpassung des E-Moduls nötig sein.

Tabelle 4.3: Kennwerte der im Tragwerk verwendeten Balken

Material	S355J2
Außendurchmesser D	40 mm
Wandstärke t	2 mm

Mit den in der Tabelle 4.3 dargestellten Abmessungen werden die in Tabelle 4.4 aufgeführten Parameter für die Balken berechnet. Für die Fläche A und das Flächenträgheitsmoment I gelten:

$$A = \pi \cdot (D - t) \cdot t$$

und

$$I = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - (D - 2t)^4) .$$

Tabelle 4.4: Parameter der Balken zur Berechnung

E-Modul E	210 GPa
Fläche A	238,8 mm ²
Flächenträgheitsmoment I	43 215 mm ⁴

4.3.1 Berechnung des Grundtragwerkes mit dem Übertragungsmatrizenverfahren

Zunächst soll das in Abbildung 4.6 dargestellte Tragwerk ausschließlich mit dem Übertragungsmatrizenverfahren berechnet werden. Der in Abbildung 4.7 rot dargestellte Hauptstrang wird durch die Felder [1], [3], [4] und [5] definiert. Die Felder [2] und [6] werden mittels Steifigkeitszahlen in den Punktmatrizen \mathbf{P}_4 und \mathbf{P}_5 berücksichtigt.

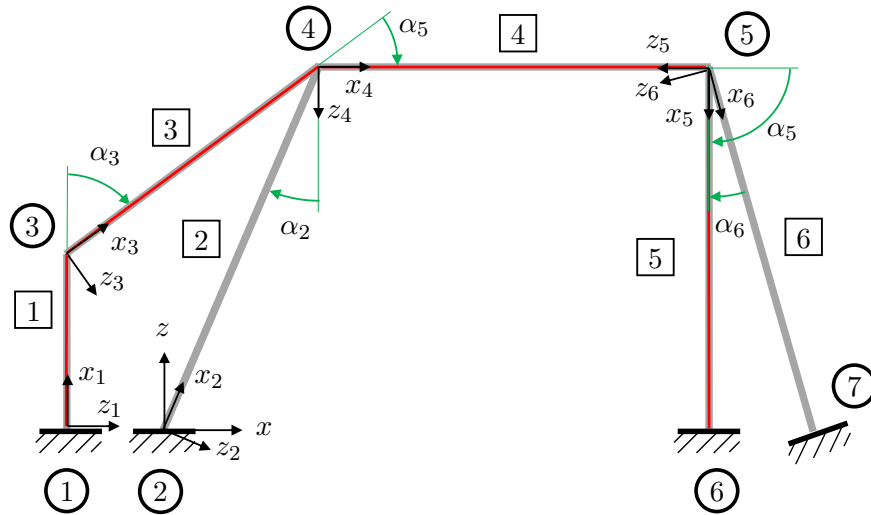


Abbildung 4.7: Lokale Koordinatensysteme und Bezeichnungen der Knoten, Balken und Transformationswinkel und Definition des Hauptstrangs

Die Produktmatrix \mathbf{U} für den Hauptstrang ergibt sich zu:

$$\mathbf{U} = \mathbf{F}_{5,1} \cdot \mathbf{T}_5 \cdot \mathbf{P}_5 \cdot \mathbf{P}_{S,5}^{xz} \cdot \mathbf{F}_{4,1} \cdot \mathbf{P}_{S,4}^{xz} \cdot \mathbf{T}_4 \cdot \mathbf{P}_4 \cdot \mathbf{F}_{3,1} \cdot \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{F}_{1,1}.$$

Die Berechnung der Matrizen soll im Folgenden kurz beschrieben werden:

- Die Feldmatrizen $\mathbf{F}_{1,1}$, $\mathbf{F}_{3,1}$, $\mathbf{F}_{4,1}$, $\mathbf{F}_{5,1}$ lassen sich mit der Gleichung 3.12 und den Werten aus den Tabellen 4.2 und 4.4 berechnen.
- Die Punktmatrizen \mathbf{P}_4 und \mathbf{P}_5 enthalten die äußeren Lasten $F_{Q,4}$ und $F_{Q,5}$. Hierfür wird die Punktmatrix mit der Gleichung 3.25 verwendet, jedoch werden alle Einträge für die Anfederung der Stützen zu Null gesetzt. In der Lastspalte werden die äußeren Lasten $F_{Q,4}$ und $F_{Q,5}$ als Sprunggrößen eingetragen. Es ist zu beachten, dass die Kräfte in Richtung des lokalen Koordinatensystems des vorhergehenden Feldes wirken. Die Kraft $F_{Q,4}$ in der Punktmatrix \mathbf{P}_4 steht senkrecht auf dem Feld [3]. Äußere Lasten, welche unter einem Winkel auf das jeweilige Feld wirken können über die Drehung mittels einer Punktmatrix \mathbf{T} oder durch die Aufteilung in die Komponenten F_Q und F_N modelliert werden.
- Mit den Punktmatrizen $\mathbf{P}_{S,4}^{xz}$ und $\mathbf{P}_{S,5}^{xz}$ werden die Stützen modelliert. Hierfür werden zunächst in die Gleichung 3.25 die Parameter der Stützen eingesetzt (Tabellen 4.2 und 4.4). Die so berechneten Punktmatrizen $\mathbf{P}_{S,4}$ und $\mathbf{P}_{S,5}$ werden über die Gleichung 3.26 in die gewünschte Lage gedreht. Der Winkel beschreibt dabei die Verdrehung der Stütze gegenüber der z -Achse im Uhrzeigersinn. Zu beachten ist, dass

im vorliegenden Beispiel die Stütze [6] entgegen dem Uhrzeigersinn gedreht wurde und somit der Winkel $\alpha = -26^\circ$ beträgt.

- Die Punktmatrizen \mathbf{T}_3 , \mathbf{T}_4 und \mathbf{T}_5 bilden die Knickstellen im Tragwerk ab. Diese werden mit der Gleichung 3.18 und den Werten aus der Tabelle 4.2 (Spalte α_{UEMV}) berechnet.

Das Tragwerk ist an Punkt ① und Punkt ⑥ fest eingespannt. Der Anfangsvektor \mathbf{z}_0 am Startpunkt des Hauptstranges kann mit den Randbedingungen $u_0, w_0, \varphi_0 = 0$ sowie $M_0, F_{N,0}, F_{Q,0} \neq 0$ aufgestellt werden und es ergibt sich somit:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_0 \\ F_{N,0} \\ F_{Q,0} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot M_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F_{N,0} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F_{Q,0} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1,$$

und kann zu

$$\mathbf{z}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_0} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} M_0 \\ F_{N,0} \\ F_{Q,0} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_0}$$

umgeformt werden. Für das Übertragungsverhalten des Tragwerkes gilt die Beziehung:

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0,$$

sowie ausgeschrieben:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ F_{N,1} \\ F_{Q,1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} & k_{1,7} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} & k_{2,7} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} & k_{3,7} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} & k_{4,7} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} & k_{5,7} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} & k_{6,7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ F_{N,0} \\ F_{Q,0} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zur Bestimmung der Lösung muss das Gleichungssystem in die Form $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$ gebracht werden. Nach Umformung ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} k_{1,7} \\ k_{2,7} \\ k_{3,7} \\ k_{4,7} \\ k_{5,7} \\ k_{6,7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} & 0 & 0 & 0 \\ k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} & 0 & 0 & 0 \\ k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} & 0 & 0 & 0 \\ k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} & 1 & 0 & 0 \\ k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} & 0 & 1 & 0 \\ k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ F_{N,0} \\ F_{Q,0} \\ M_1 \\ F_{N,1} \\ F_{Q,1} \end{bmatrix}$$

und der Lösungsvektor kann mit einem geeigneten Verfahren berechnet werden. Die Zustandsvektoren für die Felder ergeben sich durch schrittweises Einsetzen in die Gleichungen 4.2:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{1,1} &= \mathbf{F}_{1,1} \cdot \mathbf{z}_0, \\ \mathbf{z}_{3,1} &= \mathbf{F}_{3,1} \cdot \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{F}_{1,1} \cdot \mathbf{z}_0, \\ \mathbf{z}_{4,1} &= \mathbf{F}_{4,1} \cdot \mathbf{P}_{4,xy} \cdot \mathbf{T}_4 \cdot \mathbf{P}_4 \cdot \mathbf{F}_{3,1} \cdot \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{F}_{1,1} \cdot \mathbf{z}_0, \\ \mathbf{z}_{5,1} &= \mathbf{F}_{5,1} \cdot \mathbf{T}_5 \cdot \mathbf{P}_5 \cdot \mathbf{P}_{5,xy} \cdot \mathbf{F}_{4,1} \cdot \mathbf{P}_{4,xy} \cdot \mathbf{T}_4 \cdot \mathbf{P}_4 \cdot \mathbf{F}_{3,1} \cdot \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{F}_{1,1} \cdot \mathbf{z}_0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.3.2 Berechnung des Grundtragwerkes mit dem Deformationsverfahren

Im Folgenden soll wiederum das in Abbildung 4.6 dargestellte Tragwerk berechnet werden, jedoch soll in diesem Abschnitt ausschließlich das Deformationsverfahren zur Anwendung kommen. In Abbildung 4.8 sind die Definition der lokalen Koordinatensysteme sowie die Transformationswinkel dargestellt.

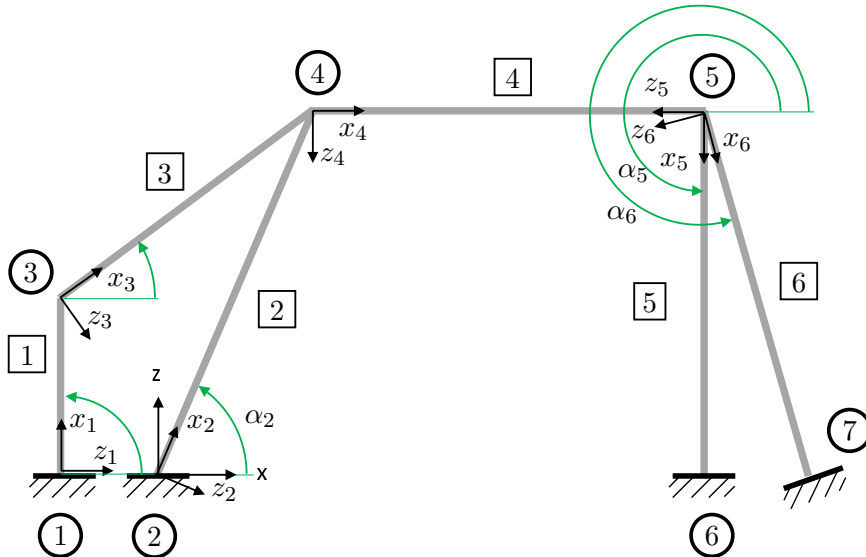


Abbildung 4.8: Definition der Transformationswinkel und der lokalen Koordinatensysteme für das Deformationsverfahren

Die Knoten ③, ④ und ⑤ sind frei bewegliche Knoten und werden im Vektor \mathbf{u} zusammengefasst. Es gilt:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_5 \end{bmatrix}.$$

Die Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} beschreibt die Steifigkeit der an den frei beweglichen Knoten angrenzenden Felder, sowie die Kopplung der frei beweglichen Knoten durch das Feld [4].

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,0,0}^{xz} + \mathbf{K}_{3,0,0}^{xz} & \mathbf{K}_{3,0,1}^{xz} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{3,1,0}^{xz} & \mathbf{K}_{3,1,1}^{xz} + \mathbf{K}_{2,0,0}^{xz} + \mathbf{K}_{4,0,0}^{xz} & \mathbf{K}_{4,0,1}^{xz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{4,1,0}^{xz} & \mathbf{K}_{4,1,1}^{xz} + \mathbf{K}_{5,0,0}^{xz} + \mathbf{K}_{6,0,0}^{xz} \end{bmatrix}.$$

Die Einträge der Matrix \mathbf{K} werden mit den Gleichungen 3.31 bis 3.34 für die Submatrizen gebildet und in das globale Koordinatensystem transformiert. Der erste Index entspricht der Balkennummer, der zweite und dritte Index zeigt die entsprechende Submatrix an.

Die äußeren Kräfte auf die frei beweglichen Knoten werden in dem Vektor \mathbf{P}^{xz} zusammengefasst:

$$\mathbf{P}^{xz} = \begin{bmatrix} F_{N,4}^{xz} \\ F_{Q,4}^{xz} \\ M_4^{xz} \\ F_{N,5}^{xz} \\ F_{Q,5}^{xz} \\ M_5^{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,88 \text{ kN} \\ -6,15 \text{ kN} \\ 0 \\ 0 \\ -10 \text{ kN} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Kraft $F_{Q,4}$ steht normal auf dem Balken [3], sodass diese in die Komponenten zerlegt und durch $F_{N,4}^{xz}$ und $F_{Q,4}^{xz}$ abgebildet wird.

Der Randschnittkraftvektor \mathbf{F}_0 enthält die an den frei beweglichen Knoten angreifenden Randschnittkräfte, welche beispielsweise durch eine Streckenlast oder Einzelkräfte auf den Balken verursacht werden. Im betrachteten Beispiel greifen alle Kräfte an den Knoten an, sodass für \mathbf{F}_0 gilt:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{0}.$$

Aufgrund des Kräfte- und Momentengleichgewichtes ergeben sich das Gleichungssystem:

$$\mathbf{P}^{xz} - \mathbf{F}_0^{xz} - \mathbf{K}^{xz} \cdot \mathbf{u}^{xz} = \mathbf{0},$$

das in die Form $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$ gebracht werden kann:

$$\mathbf{K}^{xz} \cdot \mathbf{u}^{xz} = \mathbf{P}^{xz} - \mathbf{F}_0^{xz}$$

und der Lösungsvektor \mathbf{u}^{xz} für die Verschiebungen an den frei beweglichen Knoten:

$$\mathbf{u}^{xz} = \begin{bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ u_4 \\ w_4 \\ \varphi_4 \\ u_5 \\ w_5 \\ \varphi_5 \end{bmatrix}.$$

Die Schnittgrößenverläufe über den Träger können über das Übertragungsmatrizenverfahren berechnet werden. Hierfür werden z. B. für das Feld [3] aus den Verschiebungen \mathbf{u}^{xz} und den Schnittkräften die Zustandsvektoren $\mathbf{z}_{3,0}$ und $\mathbf{z}_{4,0}$ gebildet. Mit dem Algorithmus für unverzweigte Tragwerke lassen sich daraufhin die Schnittgrößenverläufe in Abhängigkeit der x -Koordinate berechnen.

4.3.3 Berechnung des erweiterten Tragwerkes mit dem Deformationsverfahrens

Im Folgenden soll das in Abbildung 4.9 dargestellte Tragwerk um eine Kreuzverstrebung erweitert werden.

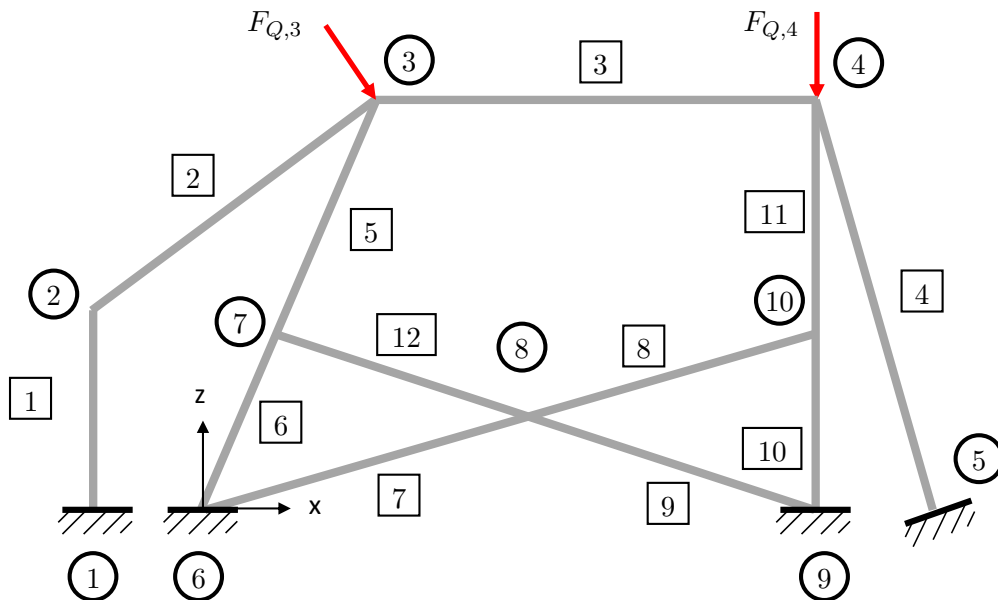


Abbildung 4.9: Erweitertes Tragwerk zur Berechnung mit dem Deformationsverfahren

In Abbildung 4.10 ist die Definition der lokalen Koordinatensysteme dargestellt. Die Berechnung des Tragwerkes erfolgt mit dem Deformationsverfahren. Eine Berechnung mit dem Übertragungsmatrizenverfahren ist nicht möglich, da das Tragwerk aufgrund der Kopplung durch die hinzugefügten Streben nicht mehr in Haupt- und Nebenstrang aufgeteilt werden kann.

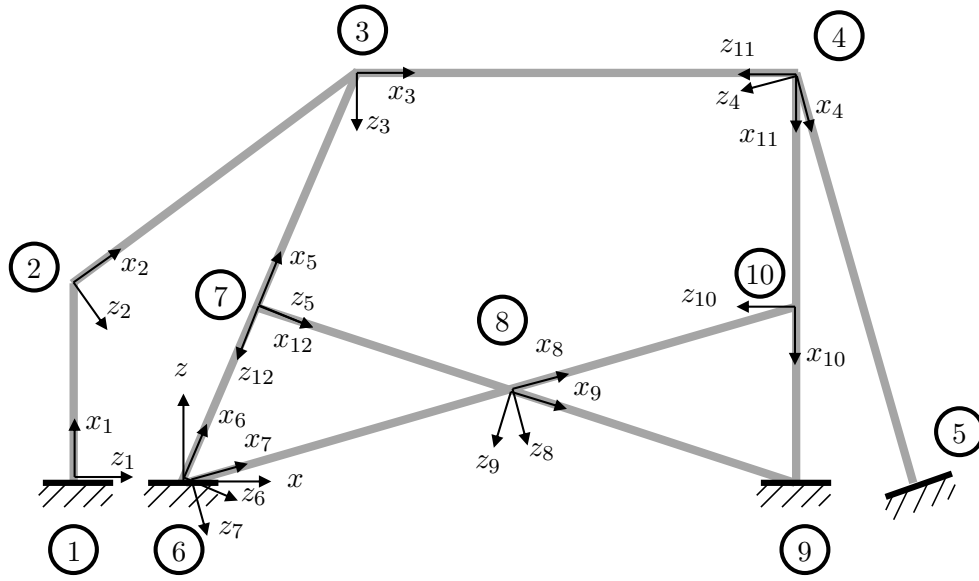


Abbildung 4.10: Definition der lokalen Koordinatensysteme

Es wird der Verschiebungsvektor \mathbf{u}^{xz} für die frei beweglichen Knoten ②, ③, ④, ⑦, ⑧ und ⑩ aufgestellt:

$$\mathbf{u}^{xz} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^{xz} \\ \mathbf{u}_3^{xz} \\ \mathbf{u}_4^{xz} \\ \mathbf{u}_7^{xz} \\ \mathbf{u}_8^{xz} \\ \mathbf{u}_{10}^{xz} \end{bmatrix}.$$

Die Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{xz} setzt sich aus den Einträgen $\sum \mathbf{K}_i^{xz}$ welche die aufsummierten angrenzenden Steifigkeiten am Punkt i darstellen, die Steifigkeitssubmatrizen $\mathbf{K}_{k,n,m}^{xz}$ für die Balken k sowie die 3×3 -Nullmatrizen $\mathbf{0}$ zusammen:

$$\mathbf{K}^{xz} = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{K}_2^{xz} & \mathbf{K}_{2,0,1}^{xz} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{2,1,0}^{xz} & \sum \mathbf{K}_3^{xz} & \mathbf{K}_{3,0,1}^{xz} & \mathbf{K}_{5,0,1}^{xz} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{3,1,0}^{xz} & \sum \mathbf{K}_4^{xz} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{11,0,1}^{xz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{5,1,0}^{xz} & \mathbf{0} & \sum \mathbf{K}_7^{xz} & \mathbf{K}_{12,0,1}^{xz} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12,1,0}^{xz} & \sum \mathbf{K}_8^{xz} & \mathbf{K}_{8,0,1}^{xz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{11,1,0}^{xz} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{8,1,0}^{xz} & \sum \mathbf{K}_{10}^{xz} \end{bmatrix},$$

mit

$$\sum \mathbf{K}_2^{xz} = \mathbf{K}_{1,0,0}^{xz} + \mathbf{K}_{2,0,0}^{xz},$$

$$\sum \mathbf{K}_3^{xz} = \mathbf{K}_{2,1,1}^{xz} + \mathbf{K}_{3,0,0}^{xz} + \mathbf{K}_{5,0,0}^{xz},$$

$$\begin{aligned}
\sum K_4^{xz} &= K_{3,1,1}^{xz} + K_{4,0,0}^{xz} + K_{11,0,0}^{xz}, \\
\sum K_7^{xz} &= K_{5,1,1}^{xz} + K_{6,0,0}^{xz} + K_{12,0,0}^{xz}, \\
\sum K_8^{xz} &= K_{7,0,0}^{xz} + K_{8,0,0}^{xz} + K_{9,0,0}^{xz} + K_{12,1,1}^{xz}, \\
\sum K_{10}^{xz} &= K_{8,1,1}^{xz} + K_{10,0,0}^{xz} + K_{11,1,1}^{xz}.
\end{aligned}$$

Der Lastvektor \mathbf{P}^{xz} enthält die Querkraft $F_{Q,3}$ am Knoten ③ welche über die Komponenten $F_{N,3}^{xz}$ und $F_{Q,3}^{xz}$ abgebildet werden und die Querkraft $F_{Q,4}$ am Knoten ④:

$$\mathbf{P}^{xz} = \begin{bmatrix} F_{N,3}^{xz} \\ F_{Q,3}^{xz} \\ M_3^{xz} \\ F_{N,4}^{xz} \\ F_{Q,4}^{xz} \\ M_4^{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,88 \text{ kN} \\ -6,15 \text{ kN} \\ 0 \\ 0 \\ -10 \text{ kN} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das entstehende Gleichungssystem kann analog zum vorhergehenden Beispiel nach dem Verschiebungsvektor \mathbf{u}^{xz} gelöst werden.

4.3.4 Berechnung eines Tragwerkes mit dem kombinierten Verfahren

Im Folgenden soll das Tragwerk mit einer Kombination aus dem Übertragungsmatrizen- und dem Deformationsverfahren berechnet werden. Es wird das in Abbildung 4.11 dargestellte ebene Tragwerk definiert, welches an den Hauptbügel auf Höhe der B-Säule angelehnt ist.

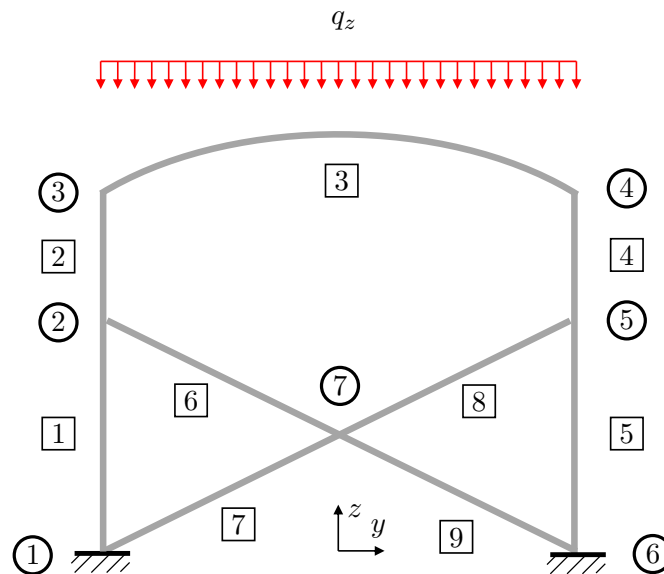


Abbildung 4.11: Hauptbügel B-Säule als vereinfachtes ebenes Rahmentragwerk mit einge-tragenen Lasten sowie Benennung der Felder und Knoten

4. Modellierung eines Balkentragwerkes mit dem Übertragungsmatrizenverfahren

Das Tragwerk ist an den Punkten ① und ⑥ fest eingespannt. Auf den Bogen ③ zwischen den Punkten ③ und ④ wirkt die Streckenlast q in negativer z -Richtung. In Tabelle 4.5 sind die Koordinaten aufgeführt. Die Abmessungen der Rohrquerschnitte sind identisch zu den vorhergehenden Beispielen und in Tabelle 4.3 zu finden. Die zur Berechnung der Elementsteifigkeits- und Transformationsmatrizen benötigten Längen und Winkel sind in Tabelle 4.6 dargestellt. Der Balken ③ wird mittels dem Übertragungsmatrizenverfahren als Makroelement abgebildet.

Tabelle 4.5: Koordinaten des ebenen Rahmentragwerkes

Punkt [-]	Koordinaten [mm]	
	y	z
①	-500	0
②	-500	500
③	-500	1000
④	500	1000
⑤	500	500
⑥	500	0
⑦	0	250

Tabelle 4.6: Länge und Winkel der Einzelträger des Rahmentragwerkes

Balken [-]	Länge [mm]	$\alpha_{\text{DFV}} [^\circ]$
①	500	90
②	500	90
③	-	-
④	500	270
⑤	1000	270
⑥	559	333,4
⑦	559	26,6
⑧	559	26,6
⑨	559	333,4

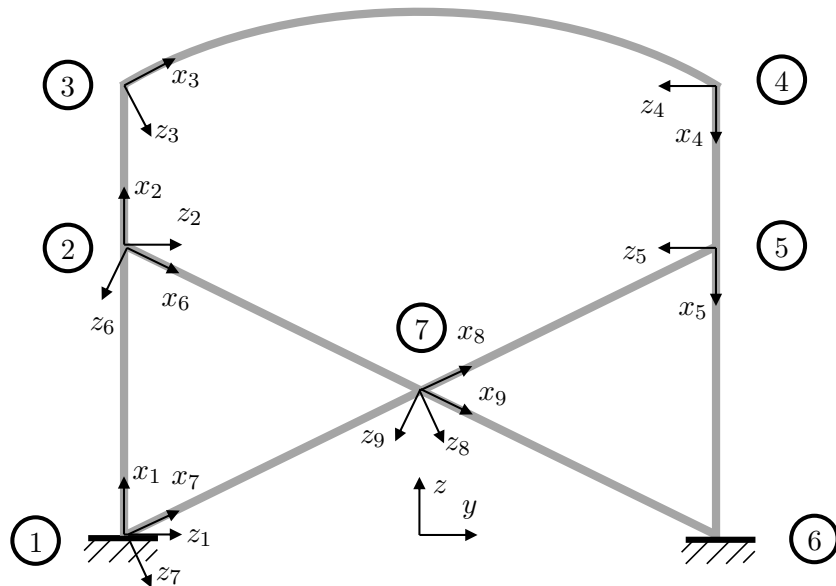


Abbildung 4.12: Definition der lokalen Koordinatensysteme des Hauptbügels B-Säule

Die Abbildung 4.12 zeigt die lokalen Koordinatensysteme. Während das globale Koordinatensystem die im Fahrzeugbau übliche Achsenbeschriftung y für die Querachse und z für die Hochachse verwendet, werden die lokalen Achsen weiterhin mit x und z bezeichnet.

Zunächst soll für den Bogen [3] ein Makroelement abgeleitet werden (siehe Abb. 4.13). Der Vorteil der Modellierung als Makroelement ist, dass der Bogen mit einer relativ hohen Anzahl an Einzelbalken abgebildet werden kann (im Vergleich zu den restlichen Freiheitsgraden des Gesamttragwerkes), ohne die Komplexität der Systemsteifigkeitsmatrix zu erhöhen. Der Bogen [3] im betrachteten Beispiel soll mit zehn Balken angenähert werden. Die Länge und Winkel der Balken ist in Tabelle 4.7 dargestellt. Die Teilabschnitte werden mit [1] bis [10] bezeichnet, während die entstehenden Punkte mit (a) bis (i) beschriftet werden.

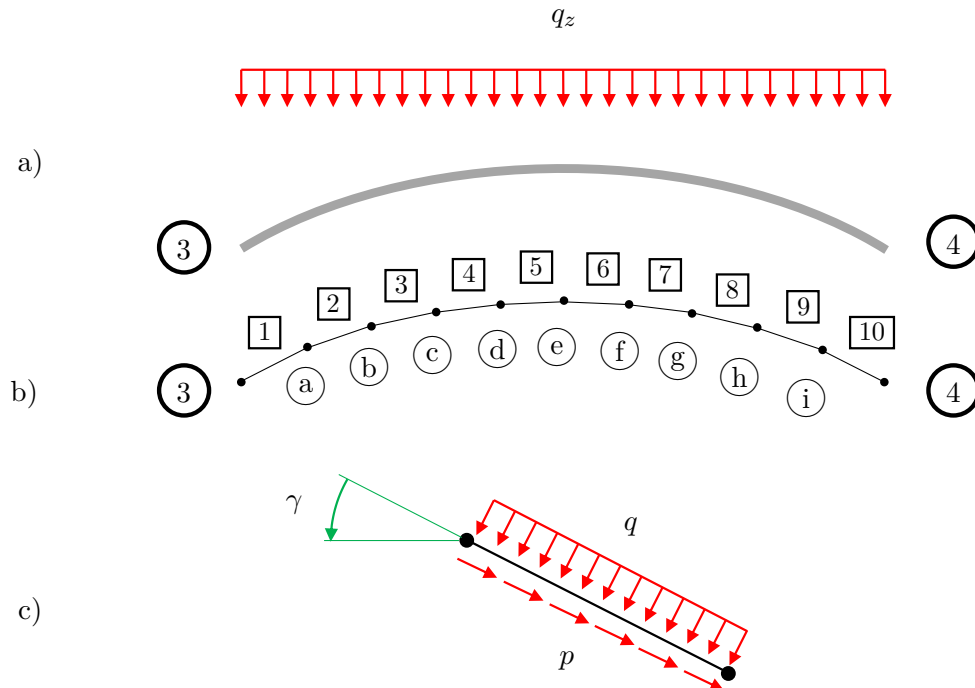


Abbildung 4.13: Tragwerksstrang zur Ableitung eines Makroelementes; a) gekrümmter Balken mit Streckenlast in negativer z -Richtung; b) Modellierung mit abschnittsweise geraden Balken; c) Zerlegung der Streckenlast in Komponenten

Tabelle 4.7: Länge und Winkel der Teilabschnitte des Bogen 3

Balken [-]	Länge [mm]	α [°]	Balken [-]	Länge [mm]	α [°]
[1]	106,6	-20,3	[6]	100,1	4,41
[2]	103,8	4,64	[7]	100,7	4,42
[3]	101,9	4,54	[8]	101,9	4,47
[4]	100,7	4,47	[9]	103,8	4,54
[5]	100,1	4,42	[10]	106,6	4,64

4. Modellierung eines Balkentragwerkes mit dem Übertragungsmatrizenverfahren

Die Streckenlast $q_z = 50 \text{ N mm}^{-1}$ wird über die Zerlegung in die Komponenten q und p aufgebracht. Es gilt:

$$\begin{aligned} q &= \cos^2 \gamma \cdot q_z, \\ p &= \cos \gamma \cdot \sin \gamma \cdot q_z, \end{aligned}$$

wobei γ der Neigungswinkel der Abschnitte im globalen Koordinatensystem ist. Dieser kann mit Hilfe von Tabelle 4.7 berechnet werden, welche die relativen Winkel α der Abschnitte zueinander enthält.

Zur Aufstellung der Felder wird die Feldmatrix aus Gleichung 4.3 verwendet. Diese wurde auf die Vorzeichendefinition und Sortierung der Zeilen und Spalten nach Graf und Vassilev [48] angepasst und enthält die Einträge für die Lastgrößen, um die Streckenlasten abzubilden. Es werden die Lastgrößen für eine konstante Streckenlast gewählt. Weitere Lastgrößen können aus Tabellen aus [59, 48] entnommen werden.

$$\begin{bmatrix} u_k \\ w_k \\ \varphi_k \\ M_k \\ F_{Q,k} \\ F_{N,k} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_k}{EA} & -\frac{px_k^2}{2EA} \\ 0 & 1 & x_k & -\frac{x_k^2}{2EI_y} & -\frac{x_k^3}{6EI_y} & 0 & \frac{qx_k^4}{24EI} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{x_k}{EI_y} & -\frac{x_k^2}{2EI_y} & 0 & \frac{qx_k^3}{6EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_k & -\frac{qx_k^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -qx_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -px_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k,0} \\ w_{k,0} \\ \varphi_{k,0} \\ M_{k,0} \\ F_{Q,k,0} \\ F_{N,k,0} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Die Produktmatrix \mathbf{U} für den Bogen ergibt sich aus einer alternierenden Reihe von Feld- und Transformationsmatrizen zu:

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}_4 \cdot \mathbf{F}_{10,1} \cdot \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{F}_{9,1} \cdot \mathbf{T}_h \cdot \mathbf{F}_{8,1} \cdot \mathbf{T}_g \cdot \mathbf{F}_{7,1} \cdot \mathbf{T}_f \cdot \mathbf{F}_{6,1} \cdot \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{F}_{5,1} \cdot \mathbf{T}_d \cdot \mathbf{F}_{4,1} \cdot \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{F}_{3,1} \cdot \mathbf{T}_b \cdot \mathbf{F}_{2,1} \cdot \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{F}_{1,1} \cdot \mathbf{T}_3,$$

mit $\mathbf{T}_4 = \mathbf{T}_3$.

Mit den Gleichungen 3.41 bis 3.46 werden aus der Produktmatrix \mathbf{U} die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_3 und die Randschnittkräfte $\mathbf{F}_{0,0}$ und $\mathbf{F}_{0,1}$ berechnet:

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{3,0,0} & \mathbf{K}_{3,0,1} \\ \mathbf{K}_{3,1,0} & \mathbf{K}_{3,1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8305 & 0 & 546825 & -8305 & 0 & -546825 \\ 0 & 104 & 52007 & 0 & -104 & 52007 \\ 546825 & 52007 & 70849900 & -546825 & -52007 & -18842400 \\ -8305 & 0 & -546825 & 8305 & 0 & 546825 \\ 0 & -104 & -52007 & 0 & 104 & -52007 \\ -546825 & 52007 & -18842400 & 546825 & -52007 & 70849900 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{F}_{0,0} = \begin{bmatrix} 52,1 \text{ kN} \\ -25,0 \text{ kN} \\ -695 \text{ N m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{0,1} = \begin{bmatrix} -52,1 \text{ kN} \\ -25,0 \text{ kN} \\ 695 \text{ N m} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Mit der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_3 und die Randschnittkräften $\mathbf{F}_{0,0}$ und $\mathbf{F}_{0,1}$ ist das Makroelement vollständig bestimmt und der erste Berechnungsabschnitt abgeschlossen. Im zweiten Abschnitt wird das bekannte Deformationsverfahren angewendet, jedoch mit dem Unterschied, dass für den Bogen keine Steifigkeitsmatrizen aufgestellt, sondern die im ersten Abschnitt berechneten Werte verwendet werden. Zunächst werden die Knoten ②, ③, ④, ⑤ und ⑦ als frei bewegliche Knoten definiert und im Vektor \mathbf{u} zusammengefasst. Es gilt:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_5 \\ \mathbf{u}_7 \end{bmatrix}.$$

Die Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{yz} wird analog zum Abschnitt 3.3 und den beiden Beispielen in Abschnitt 4.3.2 und 4.3.3 gebildet und die Steifigkeitssubmatrizen $\mathbf{K}_{k,n,m}$ der Balken k entsprechend der Winkel in Tabelle 4.7 mit der Gleichung:

$$\mathbf{K}_{k,n,m}^{yz} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}_{k,n,m} \cdot \mathbf{T}$$

transformiert. Der Balken ③ wurde bereits bei der Aufstellung der Produktmatrix \mathbf{U} ins globale Koordinatensystem gedreht, sodass keine weitere Transformation notwendig ist. Die Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{yz} setzt sich somit aus den an den jeweiligen Knoten i angrenzenden Steifigkeiten $\sum \mathbf{K}_i^{xz}$ und den Steifigkeitssubmatrizen $\mathbf{K}_{k,n,m}^{xz}$ für die Balken k sowie die 3×3 -Nullmatrizen $\mathbf{0}$ zusammen. Es gilt:

$$\mathbf{K}^{yz} = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{K}_2^{yz} & \mathbf{K}_{2,0,1}^{yz} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{6,0,1}^{yz} \\ \mathbf{K}_{2,1,0}^{yz} & \sum \mathbf{K}_3^{yz} & \mathbf{K}_{3,0,1}^{yz} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{3,1,0}^{yz} & \sum \mathbf{K}_4^{yz} & \mathbf{K}_{4,0,1}^{yz} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{4,1,0}^{yz} & \sum \mathbf{K}_5^{yz} & \mathbf{K}_{8,0,1}^{yz} \\ \mathbf{K}_{6,1,0}^{yz} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{8,1,0}^{yz} & \sum \mathbf{K}_7^{yz} \end{bmatrix}$$

und

$$\sum \mathbf{K}_2^{yz} = \mathbf{K}_{1,0,0}^{yz} + \mathbf{K}_{2,0,0}^{yz} + \mathbf{K}_{6,0,0}^{yz},$$

$$\sum \mathbf{K}_3^{yz} = \mathbf{K}_{2,1,1}^{yz} + \mathbf{K}_{3,0,0}^{yz},$$

$$\sum \mathbf{K}_4^{yz} = \mathbf{K}_{3,1,1}^{yz} + \mathbf{K}_{4,0,0}^{yz},$$

$$\sum \mathbf{K}_5^{yz} = \mathbf{K}_{4,1,1}^{yz} + \mathbf{K}_{5,0,0}^{yz} + \mathbf{K}_{8,0,0}^{yz},$$

$$\sum K_7^{yz} = K_{6,1,1}^{yz} + K_{7,0,0}^{yz} + K_{8,1,1}^{yz} + K_{9,0,0}^{yz}.$$

Der gesuchte Verschiebungsvektor \mathbf{u}^{yz} kann über die Lösung des Gleichungssystems:

$$\mathbf{P}^{yz} - \mathbf{F}_0^{yz} - \mathbf{K}^{yz} \cdot \mathbf{u}^{yz} = \mathbf{0}$$

berechnet werden.

4.3.5 Auswertung und Vergleich mit einer FEM-Lösung

Im Folgenden sollen die Ergebnisse der vorgestellten Berechnungsverfahren mit den Ergebnissen einer FE-Simulation verglichen werden. Es werden hierfür die Verschiebungen an den Kraftangriffspunkten ausgewertet, was je nach Nummerierung in dem jeweiligen Beispiel die Knoten ③ und ④ bzw. ④ und ⑤ sind. Der Übersichtlichkeit halber soll bei jedem Vergleich eine Skizze mit dem berechneten Modell gezeigt werden.

Grundtragwerk

In Abbildung 4.14 ist das berechnete Tragwerk schematisch dargestellt. Bezeichnungen der Balken, Knoten und Definition der Koordinatensysteme sind im Abschnitt 4.3.1 bis 4.3.2 beschrieben.

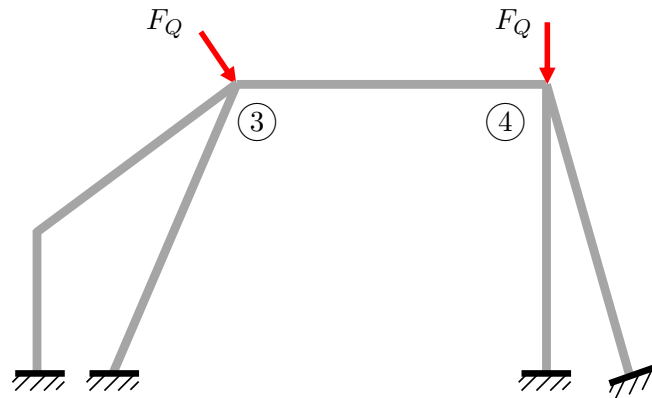


Abbildung 4.14: Grundtragwerk zum Vergleich der Ergebnisse mit dem Übertragungsmatrizen- und Deformationsverfahren mit einer Referenzlösung

Tabelle 4.8: Auswertung der Verschiebungen an den Knoten 4 und 5

	FEM	Übertragungsmatrizen- verfahren	Deformations- verfahren
u_4^{xz}	1,91 mm	1,75 mm	1,81 mm
w_4^{xz}	-1,33 mm	-1,29 mm	-1,27 mm
u_5^{xz}	1,68 mm	1,55 mm	1,59 mm
w_5^{xz}	0,232 mm	0,203 mm	0,214 mm

In Tabelle 4.8 sind die Werte für das Übertragungsmatrizenverfahren und die des Deformationsverfahrens zu finden. Der Vergleich der Ergebnisse des Deformationsverfahrens mit der Referenzlösung zeigt eine gemittelte Abweichungen von ca. 6 %. Dies war bereits bei der Beschreibung der Verfahrens zu erwarten, da die Berechnung ebenso wie bei der Finiten-Elemente-Methode auf Steifigkeitsmatrizen und einer Systemsteifigkeitsmatrix basiert. Die mittels dem Übertragungsmatrizenverfahren berechneten Verschiebungen weisen eine geringfügig größere mittlere Abweichung von ca. 9% auf.

Erweitertes Tragwerk

Das in Abbildung 4.15 dargestellte Tragwerk entspricht dem Grundtragwerk mit der Erweiterung um eine Kreuzverstrebung, wie es in einem ausgeführten Überrollkäfig im Bereich der Türen üblich wäre. Der Vergleich der Ergebnisse beschränkt sich auf die Berechnung mit dem Deformationsverfahren, da das Übertragungsmatrizenverfahren nicht angewendet werden kann, weil durch die geschlossene Struktur der Kreuzverstrebung kein hinreichender Hauptstrang bestimmt werden kann.

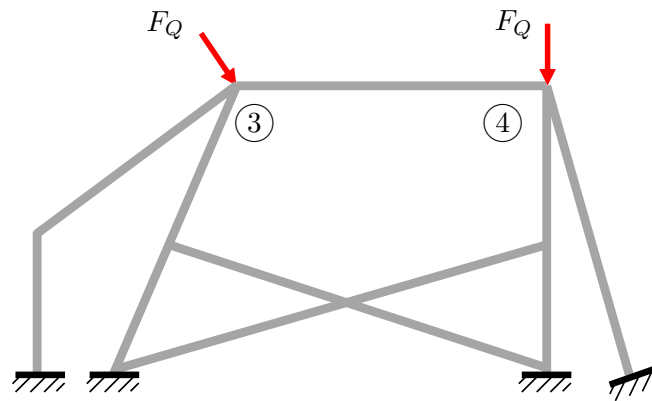


Abbildung 4.15: Erweitertes Tragwerk zum Vergleich der Ergebnisse des Deformationsverfahrens mit einer Referenzlösung

Tabelle 4.9: Auswertung der Verschiebungen an den Knoten 3 und 4

	FEM	Deformations- verfahren
u_3^{xz}	1,79 mm	1,70 mm
w_3^{xz}	-1,26 mm	-1,20 mm
u_4^{xz}	1,57 mm	1,49 mm
w_4^{xz}	0,205 mm	0,191 mm

Die berechneten Verschiebungen des erweiterten Tragwerkes sind wie zu erwarten geringer als bei dem unverstrebten Grundtragwerk (siehe Tabelle 4.9). Der gemittelte Unterschied zwischen der FE-Referenzlösung und der Lösung des Deformationsverfahrens liegen wie beim vorhergehenden Beispiel bei ca. 6%.

Kombiniertes Verfahren

Der Vergleich der mit dem kombinierten Verfahren berechneten Verschiebungen wird an dem in Abbildung 4.16 gezeigten Beispiel durchgeführt. Das Tragwerk ist dem Hauptbügel in Höhe der Position der B-Säule eines gängigen Überrollkäfiges nachempfunden. Der Vergleich läuft wie die Berechnung in zwei Schritten ab. Zunächst wird der Bogen mit dem Übertragungsmatrizenverfahren berechnet und die so ermittelten Verschiebungen mit der FE-Referenzlösung verglichen. Im zweiten Schritt wird das Gesamtsystem mit dem Deformationsverfahren berechnet und wiederum der FE-Lösung gegenüber gestellt.

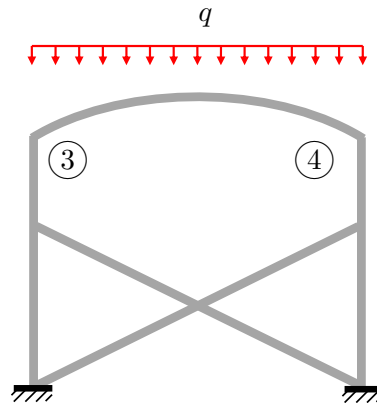


Abbildung 4.16: Hauptbügel B-Säule als vereinfachtes ebenes Tragwerk; Modellierung des Bogens mit Streckenlast als Makroelement; Berechnung des Gesamttragwerkes mit dem Deformationsverfahren

In Abbildung 4.17 ist der Bogen dargestellt, der im ersten Schritt mittels dem Übertragungsmatrizenverfahren berechnet werden soll. Die Aufstellung der Produktmatrix, die Lasten und Koordinatensysteme sind dem Abschnitt 4.3.4 zu entnehmen, jedoch soll auf die Bezeichnung der Knoten hingewiesen werden. Zum Erlangen der Elementsteifigkeiten und Randschnittkräften ist bereits das Aufstellen der Produktmatrix ausreichend. Zum Abgleich mit der Referenzlösung wird das Gleichungssystem dennoch gelöst. Durch schrittweises Aufstellen der Produktmatrizen werden die Verschiebungen berechnet. Hierfür wird der Bogen an Knoten ③ und ④ als fest eingespannt betrachtet. Die so berechneten Verschiebungen sind in Tabelle 4.10 dargestellt.

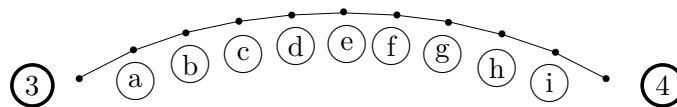


Abbildung 4.17: Bogen - Bezeichnung der Knoten

Tabelle 4.10: Verschiebungen w^{yz} des Bogens; fest eingespannt an Knoten 3 und 4

	Verschiebung w^{yz} in mm									
Knoten	③	a	b	c	d	e	f	g	h	④
FEM	0	-0,395	-1,17	-1,99	-2,59	-2,80	-2,59	-1,99	-1,17	-0,395
UEMV	0	-0,362	-1,10	-1,88	-2,45	-2,66	-2,45	-1,88	-1,10	-0,360

Die mittels des Übertragungsmatrizenverfahrens ermittelten Verschiebungen weisen gegenüber der FE-Referenzlösung eine mittlere Abweichung von ca. 5% auf.

In Tabelle 4.11 sind die mit dem Deformationsverfahren ermittelten Verschiebungen sowie die Referenzverschiebungen dargestellt, die mit einer Linienlast auf den Bogen bzw. mit den resultierenden Kräften aus Gleichung 4.4 am Knoten ③ und ④ berechnet wurden. Die Belastung mit der Linienlast entspricht dem mittels des Makroelements zu modellierenden Lastfalles. Hierbei bildet die Belastung mit den resultierenden Kräften, welche über das Übertragungsmatrizenverfahren bestimmt wurden, einen Teil dieser Modellierung ab.

Tabelle 4.11: Verschiebungen w^{xz} am Knoten 3 und 4 beim Tragwerk mit Bogen

	Deformationsverfahren	FEM	
	Einzelkräfte	Einzelkräfte	Linienlast
u_3^{xz}	−6,71 mm	−4,23 mm	−4,86 mm
w_3^{xz}	−0,477 mm	−0,625 mm	−0,675 mm
u_4^{xz}	6,84 mm	4,23 mm	4,86 mm
w_4^{xz}	−0,477 mm	−0,625 mm	−0,675 mm

Der Vergleich zeigt eine qualitative Übereinstimmung der Simulationen. Während sich die Verschiebung der beiden FEM-Lösungen um ca. 10 % unterscheiden, weichen die Ergebnisse der Berechnung mit dem Deformationsverfahren um ca. 30 % ab.

Es soll geprüft werden, ob die Unterschiede durch das Deformationsverfahren, oder die Modellierung des Bogens als Makroelement verursacht werden. In Tabelle 4.12 sind die Verschiebungen für ein modifiziertes Tragwerk, in dem der Bogen durch einen geraden Balken ersetzt wurde, dargestellt. Die gemittelte Differenz der Verschiebungen beim modifizierten Tragwerk beträgt unter 5 % zwischen beiden Berechnungsmethoden, sodass die Abweichungen durch das Markoelement bedingt werden.

Tabelle 4.12: Verschiebungen w^{xz} am Knoten 3 und 4 beim Tragwerk mit geradem Balken

	Deformations- verfahren	FEM
u_3^{xz}	−0,513 mm	−0,528 mm
w_3^{xz}	−0,503 mm	−0,491 mm
u_4^{xz}	0,489 mm	0,528 mm
w_4^{xz}	−0,500 mm	−0,491 mm

Das Anwendungsbeispiel zeigt, dass mit dem Übertragungsmatrizenverfahren aufgestellte Tragwerksstränge in Finite-Elemente-Steifigkeitsmatrizen umgeformt und aufgebrachte Lasten als Randschnittkräfte am Makroelement berücksichtigt werden können, jedoch mit einem Genauigkeitsverlust beim gewählten Beispiel.

4.3.6 Anwendung des Übertragungsmatrizenverfahrens zur Berechnung der Schnittkraftverläufe

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit des Übertragungsmatrizenverfahrens ist die Berechnung der Schnittgrößen-/Deformationsverläufe bei gegebenen Verschiebungen der Endpunkte, beispielsweise aus einer vorhergehenden FE-Simulation. In Abbildung 4.18 ist das zu betrachtende Tragwerk dargestellt.

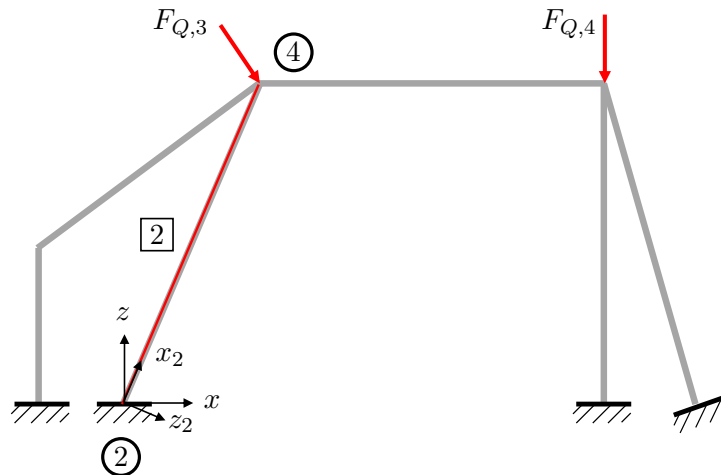


Abbildung 4.18: Ebenes Tragwerk zur Anwendung des Übertragungsmatrizenverfahrens zur Berechnung der Schnittgrößen-/Deformationsverläufe am Balken 2

Die Verschiebungen am Knoten ② ergeben sich aufgrund der festen Einspannung zu $u = w = \varphi = 0$. Die Verschiebungen am Knoten ④ sind in Tabelle 4.13 dargestellt.

Tabelle 4.13: Verschiebungen am Knoten 2 und 4 im x_2 - z_2 -Koordinatensystem

Verschiebungen		
Knoten	2	4
u	0 mm	0,601 mm
w	0 mm	2,10 mm
φ	0	−0,000 670

Der Zustandsvektor am linken Rand ergibt sich somit zu:

$$\mathbf{z}_{1,0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_0} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} M_0 \\ F_{N,0} \\ F_{Q,0} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_0},$$

und am rechten Rand zu:

$$\mathbf{z}_{1,1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,601 \\ 0 & 0 & 0 & 2,10 \\ 0 & 0 & 0 & -0,000\,670 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ F_{N,1} \\ F_{Q,1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_1},$$

Die Beziehung für das Übertragungsverhalten

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0$$

wird in die Form $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$ gebracht und gelöst. Wird in der Feldmatrix \mathbf{F} nicht die Länge des Trägers sondern die x -Koordinate eingesetzt, ergibt sich der Zustandsvektor zu:

$$\mathbf{z}_{1,x} = \mathbf{F}_{1,x} \cdot \mathbf{z}_{1,0}. \quad (4.5)$$

Die Abbildungen 4.19 bis 4.21 zeigen die Komponenten des Zustandsvektors aufgetragen über der Balkenlängsachse.

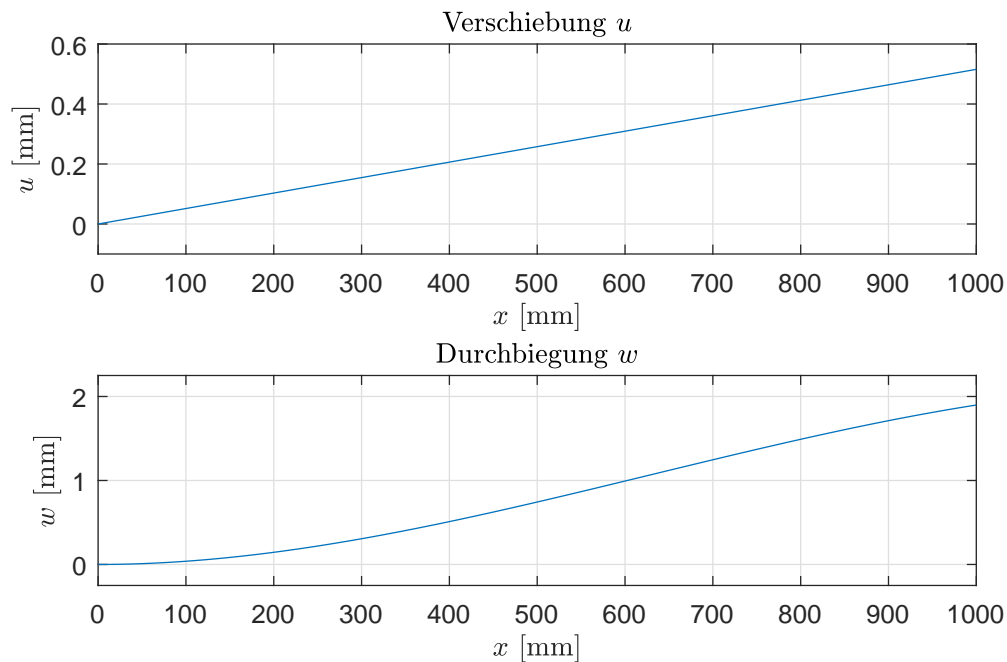


Abbildung 4.19: Verschiebung u und Durchbiegung w über der Balkenlängsachse

4. Modellierung eines Balkentragwerkes mit dem Übertragungsmatrizenverfahren

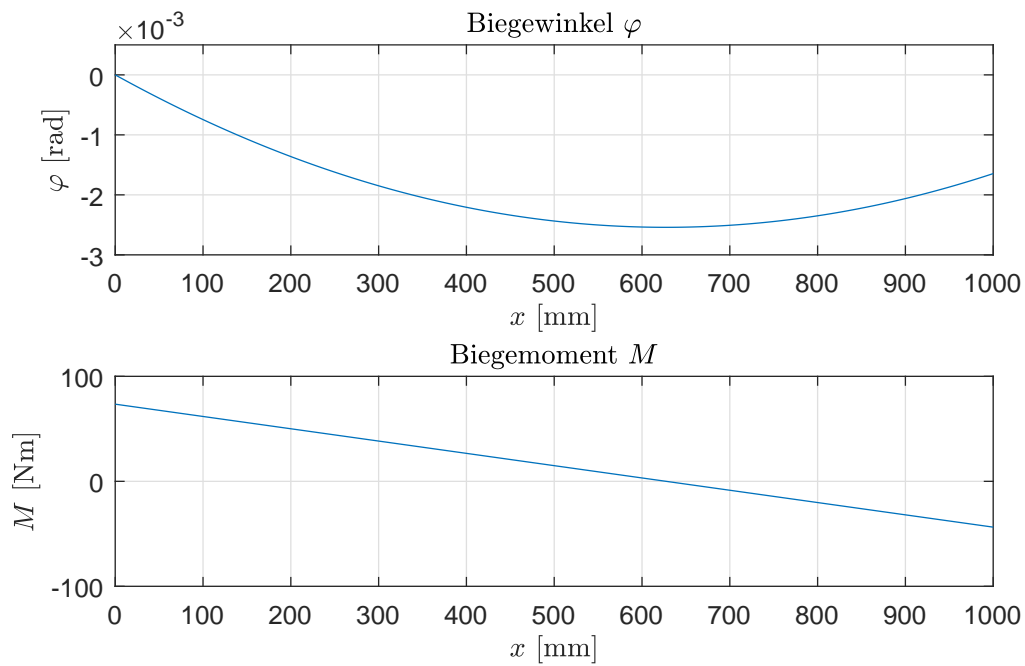


Abbildung 4.20: Biegewinkel φ und Biegemoment M über der Balkenlängsachse

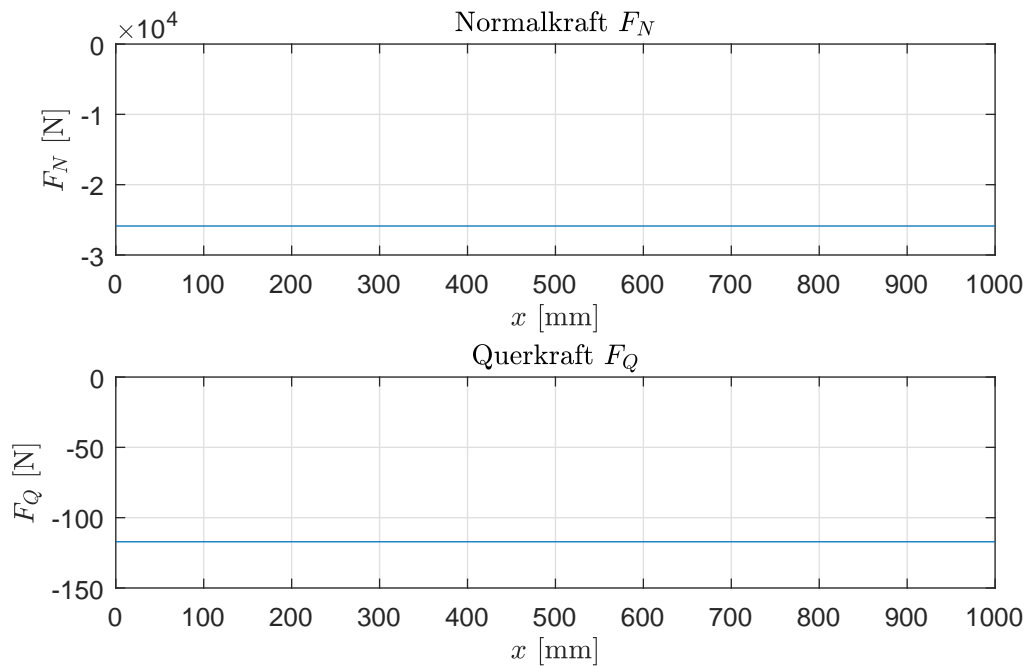


Abbildung 4.21: Normalkraft F_N und Querkraft F_Q über der Balkenlängsachse

Im dargestellten Fall wurde die Matrizenmultiplikation in Gleichung 4.5 mit Hilfe der „MATLAB symbolic toolbox“ durchgeführt, sodass die Größen in einem nachgelagerten Postprocessing-Schritt vorteilhaft weiterverarbeitet werden können.

Interpretation der Schnittgrößenverläufe

Der betrachtete Balken ist am linken Rand fest eingespannt und wird am freien Ende mit einer Normal- und einer Querkraft sowie einem Moment belastet. Da die Lasten nur an den Knoten angreifen, müssen die Kräfte konstant und das Moment linear verlaufen. Dies ist in Abbildung 4.20 und 4.21 jeweils der Fall. Ebenso entsprechen die Deformationsgrößen in Abbildung 4.19 und 4.20 den Lösungen der Differentialgleichung für die Biegelinie (Gleichung 3.1):

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6} F_{Q,0} x^3 + \frac{1}{2} (F_{Q,0} l + M_0) x^2 \right),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} F_{Q,0} x^2 + (F_{Q,0} l + M_0) x \right),$$

mit den Randbedingungen $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $M(l) = M_0$ und $F_Q(l) = F_{Q,0}$.

4.4 Teilfazit

Zur Berechnung von ebenen, unverzweigten oder schwach verzweigten Tragwerkstrukturen eignen sich beide Verfahren. Während sich das Deformationsverfahren auch für geschlossene Tragwerke eignet, stößt hierbei das Übertragungsmatrizenverfahren an seine Grenzen. Es wird zwar bei Kersten [59] eine Methode zur Berechnung von geschlossenen Tragwerken beschrieben, allerdings für die in der Baustatik üblichen, rechtwinkligen, regelmäßigen Tragwerke. Das kombinierte Verfahren liefert beim Anwendungsbeispiel zu hohe Abweichungen gegenüber der Referenzlösung.

Im Weiteren wird somit das Übertragungsmatrizenverfahren zur Untersuchung von einzelnen Balken angewandt, beispielsweise in Kapitel 5 zur Berechnung der Verschiebungen der betrachteten Strebe. Berechnungen von komplexen, dreidimensionalen Tragwerkstrukturen, wie den Überrollkäfigen in Kapitel 6, werden mit der Finite-Elemente-Methode durchgeführt.

Kapitel 5

Vereinfachte Festigkeitsbewertung geschichteter Rohre unter verallgemeinerter Belastung

Im vorhergehenden Kapitel wurde ein Verfahren zur Berechnung von Tragwerken mittels Balkenelementen vorgestellt. Ausgehend von der Geometrie und angreifenden Kräften werden die Deformations- und Schnittgrößenverläufe berechnet. Im Folgenden soll ein Verfahren zur Bewertung der Festigkeit dieser Struktur gezeigt werden, insbesondere mit der Erweiterung auf hybride Metall-Faserverbund-Rohre.

Zunächst soll der übliche Ablauf der klassischen Laminattheorie zur Festigkeitsbewertung eines Faserverbundwerkstoffes kurz beschrieben werden. Eine ausführliche Beschreibung der Einzelschritte findet sich in [98]. Im Anschluss wird der modifizierte Ablauf zur Festigkeitsbewertung von Hybrid-Rohren schematisch dargestellt.

In Abbildung 5.1 ist der Ablauf der klassischen Laminattheorie zur Berechnung eines Mehrschichtenverbundes (MSV) dargestellt.

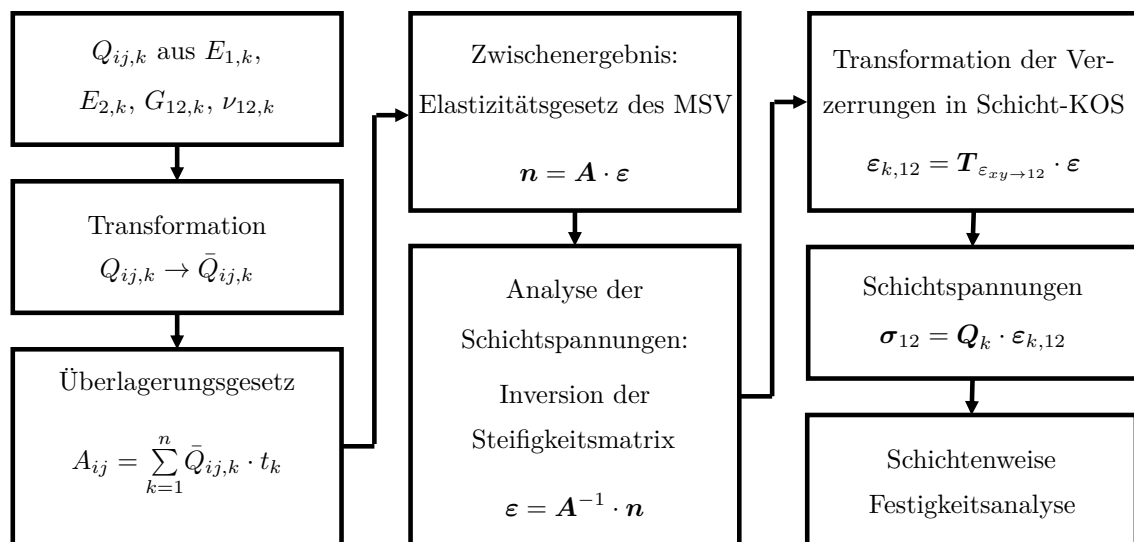


Abbildung 5.1: Ablauf der Spannungs- und Verzerrungsanalyse eines MSV (vgl. [98])

Die klassische Laminattheorie besteht aus folgenden Punkten:

- Berechnung der reduzierten Steifigkeiten $Q_{ij,k}$ der Einzelschichten aus den Materialkennwerten.
- Transformation der reduzierten Steifigkeiten vom Materialhauptachsensystem ($Q_{ij,k}$) zum globalen Koordinatensystem ($\bar{Q}_{ij,k}$).
- Aufsummieren der Schichtsteifigkeiten zur Scheibensteifigkeitsmatrix \mathbf{A} des Mehrschichtenverbundes.
- Mit der Umformung des Elastizitätsgesetz des MSV durch Invertierung der Scheibensteifigkeitsmatrix \mathbf{A} können aus den Linenlasten \mathbf{n} die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ berechnet werden.
- Die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ des Mehrschichtverbundes werden in die Koordinatensysteme der Einzelschicht transformiert.
- Die Schichtspannungen $\boldsymbol{\sigma}_{12}$ werden über die Schichtsteifigkeiten \mathbf{Q}_k und den Schichtverzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,12}$ berechnet.
- Festigkeitsanalyse der Schichten mittels Versagenskriterien.

Mit dem beschriebenen Ablauf kann das Laminat nur bzgl. dem Beginn des Versagens (engl. first ply failure) ausgelegt werden. Es wird zwar jede Schicht einzeln auf Versagen geprüft, dies hat aber keine Auswirkungen auf die anderen Schichten. Das heißt, sobald eine Schicht versagt, wird angenommen, dass das Laminat die maximale Belastbarkeit überschritten hat.

Die Beanspruchungen des Überrollkäfiges im Falle eines Umfalles sind jedoch einmalige Ereignisse, die erfüllt werden, wenn die Struktur nicht komplett versagt. Es ist somit zulässig, dass einzelne Lagen versagen, wenn durch Spannungsumlagerung die Belastung durch andere Schichten aufgenommen wird. Eine Auslegung auf „first ply failure“ würde zu einer Überdimensionierung und somit zu Mehrgewicht führen.

Für die Auslegung auf ein „last ply failure“ wird der in Abbildung 5.1 dargestellte Berechnungsablauf um eine Rückkoppelung erweitert. Dabei werden in einer Schleife nach jedem Versagen einer Einzelschicht die Steifigkeiten des Laminates neu bestimmt und die Einzellagen wiederum auf Versagen geprüft. Dies wird fortgesetzt bis das Laminat komplett versagt oder durch Spannungsumlagerung der Belastung standhält.

In Abbildung 5.2 ist der schematische Ablauf der Berechnung zur Anwendung auf die Hybridrohre dargestellt. In einem vorgeschalteten Preprocessing-Schritt werden die Werte für den E-Modul sowie das Flächenträgheitsmoment für die Rohre bestimmt. Im folgenden Schritt werden Schnittkraft- und Momentenverläufe analytisch bzw. numerisch ermittelt. Im nachgeschalteten Postprocessor werden diese Kraft- und Momentenverläufe auf die diskretisierten Rohrelemente aufgebracht und mit ein Versagenskriterium verglichen. Das Versagen einzelner diskreter Elemente wird über die Rückkopplung zum Solver über geänderte Werte für den E-Modul und das Flächenträgheitsmoment modelliert. Das Abbruchkriterium hierbei ist entweder vollständiges Versagen oder eine Konvergenz beim Versagen von einzelnen Elementen.

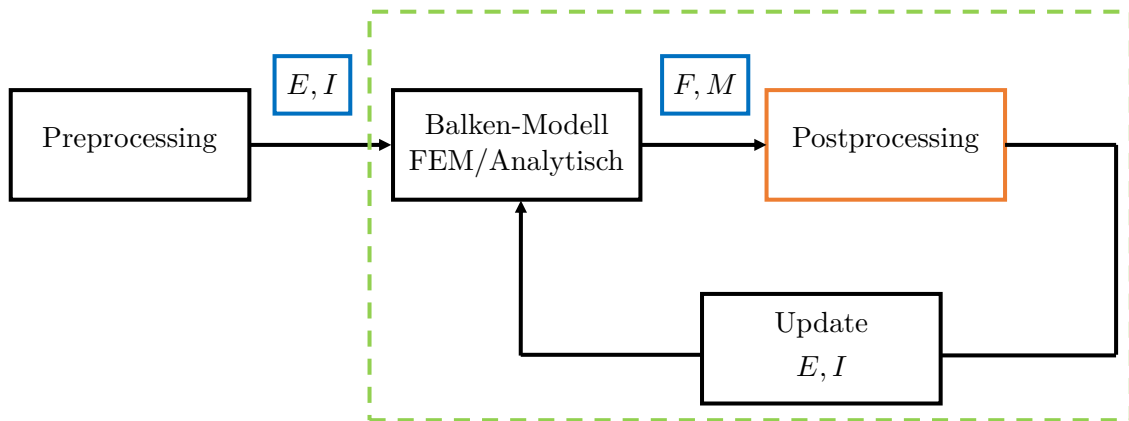


Abbildung 5.2: Berechnungsablauf zur Festigkeitsbewertung von Hybridrohr-Strukturen

5.1 Ausgewählter Lastfall

Das im Vorhergehenden schematisch dargestellte Verfahren soll an dem in Abbildung 5.3 rot gekennzeichneten Balken [2] beschrieben werden.

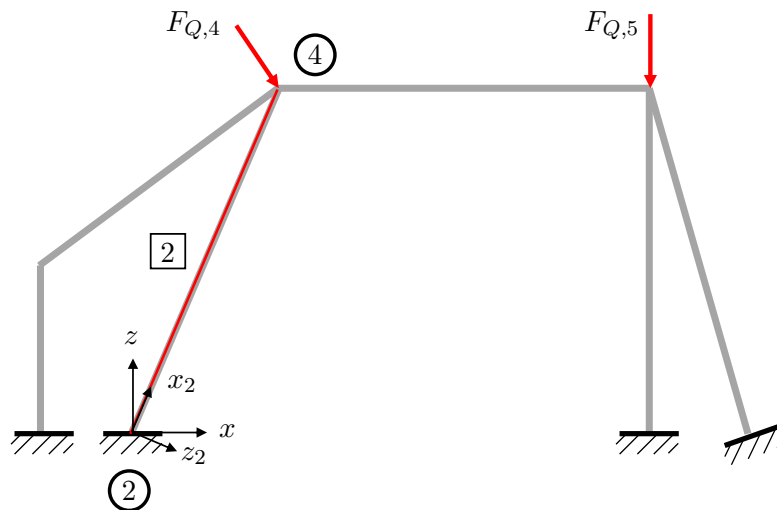


Abbildung 5.3: Ebenes Tragwerk zur Festigkeitsanalyse des Lagenaufbaus des Balken 2

Das Tragwerk entspricht der Seitenansicht eines Überrollkäfigs, welches bereits in Abschnitt 4.3 betrachtet wurde. Es wird ebenfalls der an die FIA-Lastfälle angelehnte, kombinierte Lastfall berechnet. Für die Kräfte gilt somit $F_{Q,4} = F_{Q,5} = 10 \text{ kN}$.

Die Abbildung 5.4 zeigt den in das lokale Koordinatensystem gedrehten Balken. Dieser Balken mit der Länge $l = 1000 \text{ mm}$ ist am linken Rand fest eingespannt und wird am rechten Rand mit der Normalkraft F_N , der Querkraft F_Q und dem Moment M belastet. Die Werte für den E-Modul sowie das Flächenträgheitsmoment werden im Weiteren bestimmt.

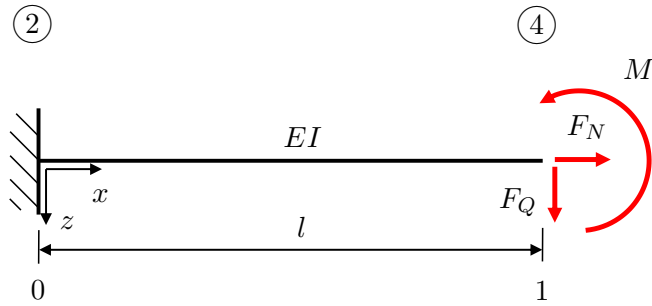
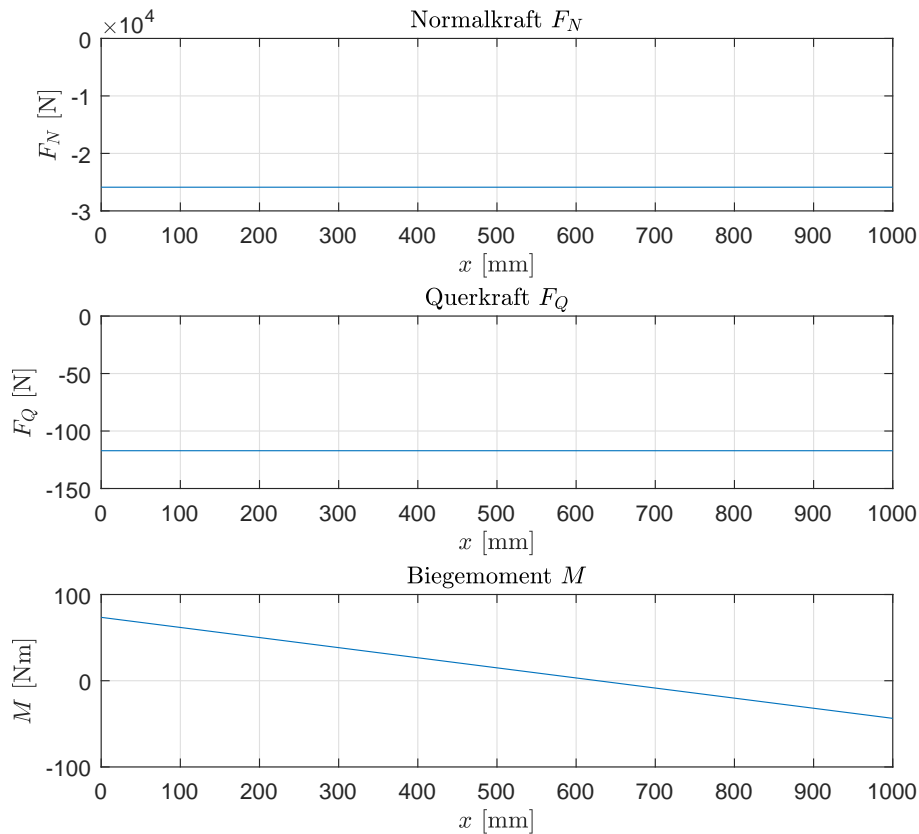


Abbildung 5.4: Balken mit eingetragenen Abmessungen und aufgebrachtten Lasten

Die Schnittgrößenverläufe werden über das Übertragungsmatrizenverfahren für den dargestellten Lastfall berechnet (siehe Abb. 5.5).


Abbildung 5.5: Normalkraft F_N , Querkraft F_Q und Biegemoment M über Balkenlängsachse

Für den betrachteten Balken [2] wird der in Abbildung 5.6 dargestellte Aufbau definiert. Dieses Hybridrohr besteht aus einem metallischen Liner und konzentrisch angeordneten Faserverbundlagen.

In Tabelle 5.1 ist der Aufbau des Laminats dargestellt. Der metallische Liner besteht aus Aluminium und ist mit sechs Lagen ummantelt. Die Fasern sowie die Faserorientierung der Einzellagen variiert über den Laminataufbau, sodass eine gesonderte Betrachtung der Einzellagen zur Festigkeitsbewertung nötig ist. In Tabelle 5.2 sind die Materialkennwerte der Einzellagen aufgeführt.

5. Vereinfachte Festigkeitsbewertung geschichteter Rohre unter verallgemeinerter Belastung

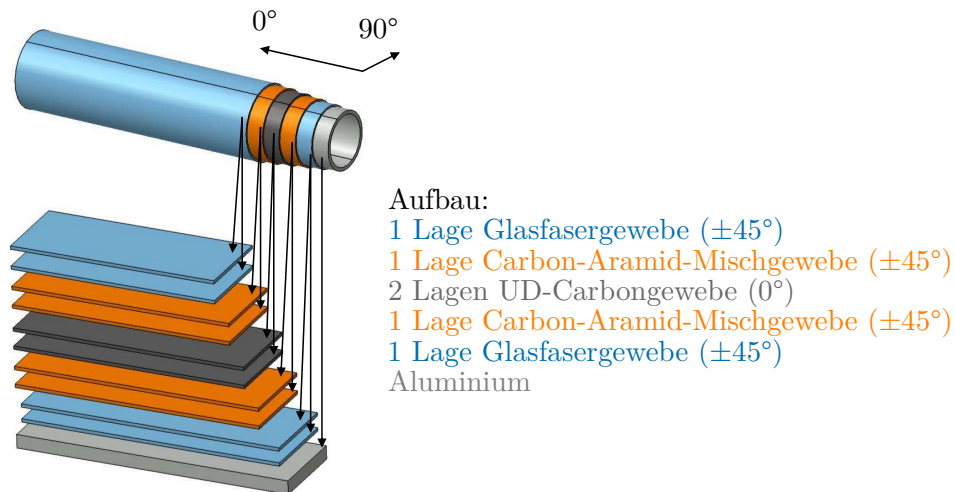


Abbildung 5.6: Aufbau des Metall-Faserverbundkunststoff-Rohr

Tabelle 5.1: Lagenaufbau des Metall-Faserverbundkunststoff-Rohr

Lage	Orientierung	Dicke	Material	Art	Innenradius
6	$\pm 45^\circ$	0,2 mm	E-Glas	Gewebe	18,2 mm
5	$\pm 45^\circ$	0,2 mm	Aramid	Gewebe	18,0 mm
4	0°	0,2 mm	Kohlefaser	UD-Gelege	17,8 mm
3	0°	0,2 mm	Kohlefaser	UD-Gelege	17,6 mm
2	$\pm 45^\circ$	0,2 mm	Aramid	Gewebe	17,4 mm
1	$\pm 45^\circ$	0,2 mm	E-Glas	Gewebe	17,2 mm
0	-	0,9 mm	Aluminium	-	16,3 mm

Tabelle 5.2: Materialkennwerte der Einzellagen [106, 122]

	Aramid-Verbund	Kohlefaser-Verbund	E-Glas-Verbund	Aluminium
E_1	80 000 MPa	138 000 MPa	45 600 MPa	70 000 MPa
E_2	5500 MPa	11 000 MPa	16 200 MPa	70 000 MPa
G_{12}	2200 MPa	5500 MPa	5830 MPa	26 119 MPa
ν_{12}	0,34	0,28	0,28	0,34
ν_{21}	0,023	0,022	0,099	0,34
X_t	1400 MPa	1500 MPa	1280 MPa	-
X_c	335 MPa	900 MPa	800 MPa	-
Y_t	30 MPa	27 MPa	40 MPa	-
Y_c	158 MPa	200 MPa	145 MPa	-
S_L, S_Q	49 MPa	80 MPa	73 MPa	-
$R_{p0,2}$	-	-	-	450 MPa

5.2 Spannungsverteilung bei verallgemeinerter Belastung

Die tatsächlichen Spannungen in den Einzelschichten können nicht ohne Weiteres berechnet werden, da diese von den jeweiligen Schichtsteifigkeiten abhängen. Somit sollen zunächst nur die ideellen Spannungen $\bar{\sigma}$ auf dem Querschnitt infolge der verschiedenen Belastungskomponenten betrachtet werden. Die Berechnung der tatsächlichen Spannungen der Schichten erfolgt ab dem Abschnitt 5.3 mittels der klassischen Laminattheorie.

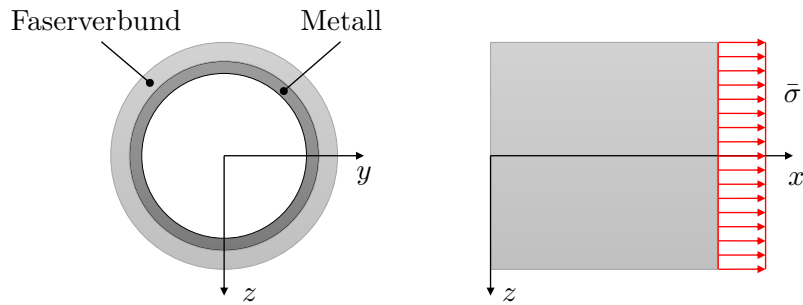


Abbildung 5.7: Spannungsverteilung bei Zug-Beanspruchung in x -Richtung

In Abbildung 5.7 ist die Spannungsverteilung infolge einer Zugkraft schematisch dargestellt. Es ergibt sich in der Schnittebene senkrecht zur Balkenlängsachse x die ideelle Normalspannung:

$$\bar{\sigma} = \frac{F_N}{A},$$

mit der Normalkraft F_N und der Querschnittsfläche A . Die ideelle Normalspannung $\bar{\sigma}$ ist über den Querschnitt konstant und wirkt in der Faserummantelung in der Laminebene.

Die Abbildung 5.8 zeigt die Schubspannungsverteilung bei Querkraft-Beanspruchung in z -Richtung.

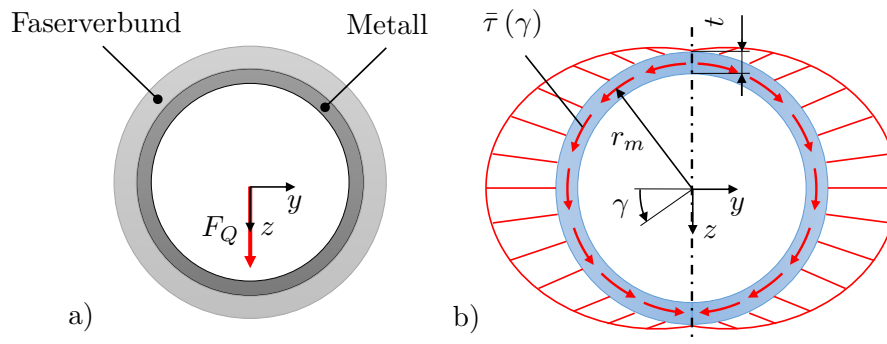


Abbildung 5.8: Verteilung der Schubspannung bei Querkraft-Beanspruchung in z -Richtung; a) Rohrquerschnitt mit Koordinatensystem und eingetragener Last; b) Schubspannungsverteilung $\bar{\tau}(\gamma)$

Der Rohrquerschnitt erfüllt die Anforderungen $t \ll d$ an ein dünnwandiges Kreisringprofil und somit gilt für die Schubspannungsverteilung [64]:

$$\bar{\tau}(\gamma) = \frac{F_Q}{\pi \cdot r_m \cdot t} \cdot \cos \gamma,$$

5. Vereinfachte Festigkeitsbewertung geschichteter Rohre unter verallgemeinerter Belastung

mit der Querkraft F_Q , dem mittleren Radius r_m und der Wandstärke t . Die Schubspannung verläuft aufgrund der dünnen Wandstärke in der Laminebene mit dem Maximum bei $z = 0$. Für $z = z_{\max}$ und $z = z_{\min}$ verschwindet die Schubspannung. Die Querkraft F_Q verursacht somit über den ganzen Umfang Schub in der Laminebene.

In Abbildung 5.9 ist die Verteilung der Zug- und Druckspannung bei Biegung um die y -Achse schematisch dargestellt.

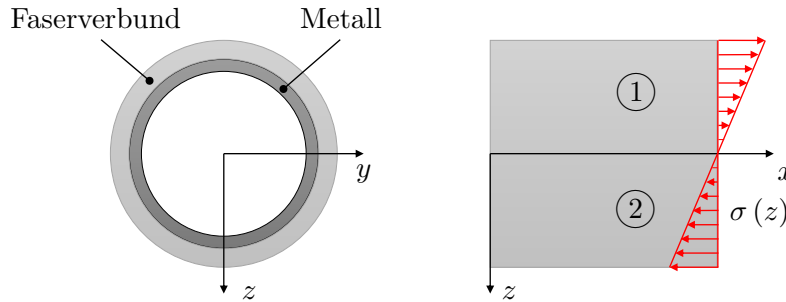


Abbildung 5.9: Zug- und Druckspannung bei Biegung um die y -Achse

Die ideelle Biegespannung $\bar{\sigma}(z)$ ist abhängig von der Entfernung zur neutralen Faser, welche im betrachteten Beispiel näherungsweise mit der x - y -Ebene identisch ist. Es gilt:

$$\bar{\sigma}(z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z,$$

mit dem Biegemoment M_y , dem Flächenträgheitsmoment I_y und der Koordinate z . Bei einem positiven Biegemoment M_z treten somit im Bereich ① oberhalb der neutralen Faser Zugspannungen auf. In der neutralen Faser wird die Spannung $\bar{\sigma}$ zu Null. Unterhalb der neutralen Faser (Bereich ②) treten Druckspannungen auf. In der Ummantelung wirken somit Zug- und Druckspannungen in der Laminebene.

In dem in Abbildung 5.4 dargestellten Lastfall tritt kein Torsionsmoment auf, jedoch soll der Vollständigkeit halber die Wirkrichtung der Schubspannung gegenüber der Faserverbundummantelung bei Torsion betrachtet werden (siehe Abb. 5.10).

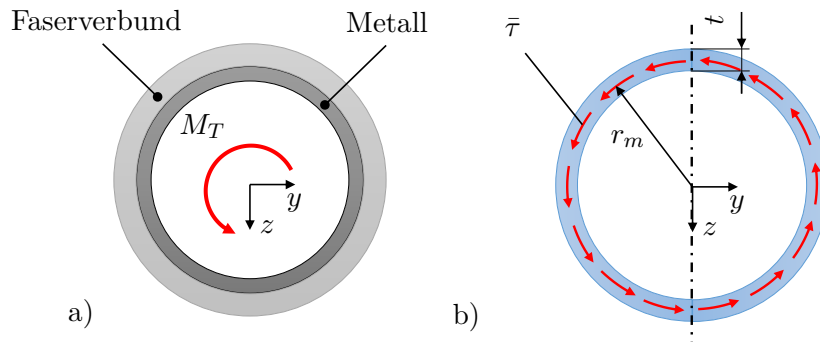


Abbildung 5.10: Schubspannung bei Torsion um die x -Achse; a) Rohrquerschnitt mit Koordinatensystem und Moment M_T ; b) Umlaufende Schubspannung $\bar{\tau}$

Beim betrachteten Rohr handelt es sich um ein dünnwandiges, geschlossenes Profil, sodass eine konstante Schubspannungsverteilung im Rohrquerschnitt angenommen werden kann. Es ergibt sich die ideelle Schubspannung $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} = \frac{M_T}{I_T} \cdot r_m,$$

mit dem Torsionsmoment M_T , dem Flächenträgheitsmoment I_T und dem mittleren Radius r_m . Die Schubspannungen verlaufen in Umfangsrichtung in die gleiche Richtung und sind über die Wanddicke konstant. In der Ummantelung treten wieder Schubspannungen in der Ebene auf.

Die ideellen Normalspannungen $\bar{\sigma}(z)$ können zu:

$$\bar{\sigma}(z) = \frac{F_N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (5.1)$$

und die ideellen Schubspannungen $\bar{\tau}(\gamma)$ können zu:

$$\bar{\tau}(\gamma) = \frac{F_Q}{\pi \cdot r_m \cdot t} \cdot \cos \gamma + \frac{M_T}{I_T} \cdot r_m \quad (5.2)$$

zusammengefasst werden.

Zur Festigkeitsanalyse von isotropen Werkstoffen wie etwa beim metallischen Liner kann aus der Normal- und der Schubspannung die Vergleichsspannung σ_V mittels der Gestaltänderungsenergie-Hypothese berechnet werden:

$$\sigma_V = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 3 \cdot \bar{\tau}^2}.$$

Die Festigkeitsbewertung der anisotropen Faserverbundummantelung wird im Folgenden betrachtet.

5.3 Diskretisierung des Rohrquerschnitts

Für die Festigkeitsanalyse werden Ebenen zur Auswertung der Spannungen definiert (siehe Abb. 5.11). Diese Ebenen sind normal zur Balkenlängsachse x und die Anzahl sowie Position ist abhängig vom Lastfall und Aufbau der Faserverbundummantelung. Im betrachteten Beispiel ist der Normal- und Querkraftverlauf konstant und das Biegemoment verläuft linear (siehe Abb. 5.5). Der Lagenaufbau ist ebenfalls über die gesamte Balkenlänge konstant. Die höchste Beanspruchung herrscht somit an den beiden Enden bei $x = 0 \text{ mm}$ und $x = 1000 \text{ mm}$. Das Biegemoment ist bei $x = 0 \text{ mm}$ betragsmäßig höher, sodass die Auswertung an dieser Position erfolgt.

Wenn die Position der höchsten Belastung nicht direkt abgelesen werden kann oder der Lagenaufbau über die Balkenlängsachse variiert, wird die Anzahl der Auswerteebenen erhöht.

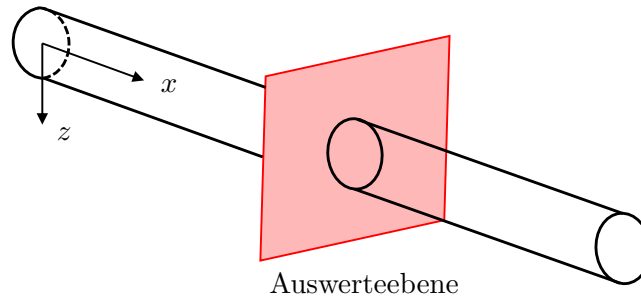


Abbildung 5.11: Ebene zur Auswertung der Spannungen zur Festigkeitsanalyse

5. Vereinfachte Festigkeitsbewertung geschichteter Rohre unter verallgemeinerter Belastung

Die Festigkeitsbewertung für isotrope Werkstoffe erfolgt über den Vergleich der höchsten auftretenden Vergleichsspannung $\sigma_{V,\max}$ gegenüber der zulässigen Spannung σ_{zul} :

$$\sigma_{V,\max} \leq \sigma_{\text{zul}}.$$

Für anisotrope Werkstoffe wie der Faserverbundkunststoffummantelung ist die Auswertung der betragsmäßig höchsten Spannungen zur Festigkeitsbewertung nicht ausreichend, da sich die Festigkeit, gegenüber der verschiedenen Belastungsarten unterscheiden. Beispielsweise ist die Zugfestigkeit üblicherweise höher als die Druckfestigkeit [106].

Im Folgenden soll somit der Rohrquerschnitt in Segmente aufgeteilt und jedes Segment gesondert auf Versagen geprüft werden. Hierfür wird der Querschnitt des Rohres in m konzentrische Kreislagen und diese wiederum in n Kreislagen-sektoren unterteilt (siehe Abb. 5.12). Aus dem in Tabelle 5.1 dargestellten Lagenaufbau ergeben sich $m = 7$ Ringe. Die Unterteilung der Ringe kann frei gewählt werden. Eine feinere Unterteilung bildet jedoch die in Abschnitt 5.5 beschriebene Schädigung der Elemente besser ab. Für die weitere Berechnung werden $n = 12$ Elemente gewählt.

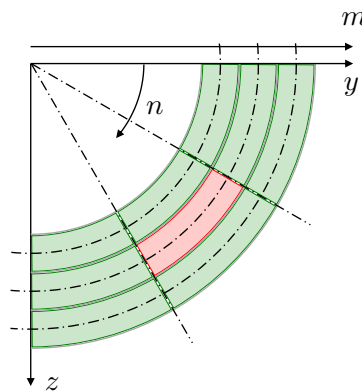


Abbildung 5.12: Diskretisierung des Rohrquerschnittes durch Teilung in m konzentrische Kreislagen und in n Kreislagen-sektoren

5.3.1 Bestimmung des Flächenträgheitsmomentes

Die Bestimmung des Flächenträgheitsmomentes des gesamten Rohrquerschnittes erfolgt über die Aufsummierung der Partial-Flächenträgheitsmomente. In Abbildung 5.13 ist ein einzelnes Kreislagen-segment dargestellt.

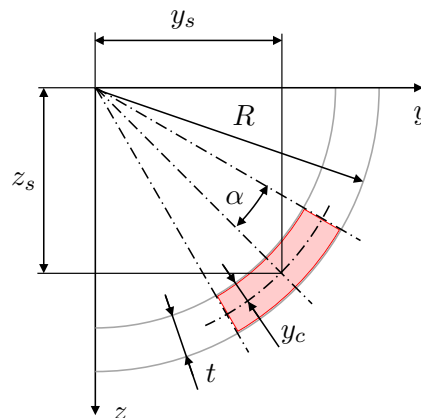


Abbildung 5.13: Kreislagen-segment zur Berechnung der Flächenträgheitsmomente

5. Vereinfachte Festigkeitsbewertung geschichteter Rohre unter verallgemeinerter Belastung

Die in der Abbildung enthaltenen Größen sind: Der halbe Öffnungswinkel des Kreisringsegmentes δ , der Außenradius R_i , die Wandstärke t_i , der Abstand des Flächenschwerpunktes $y_{c,i}$ zum Innenradius und den Abständen vom Rohrmittelpunkt zum Flächenschwerpunkt des Kreisringsegmentes $y_{s,ij}$ und $z_{s,ij}$. Die Größen, die für alle Elemente in einem Kreisring identisch, sind erhalten nur den Index i , während elementspezifische Größen mit dem Index ij bezeichnet werden.

Die Flächenträgheitsmomente der Partialfläche $I_{y,p,ij}$, $I_{z,p,ij}$ sowie der Abstand des Flächenschwerpunktes $y_{c,i}$ zum Innenradius sind Young, Budynas und Roark [127] entnommen:

$$I_{y,p,i} = R_i^3 t_i \left[\left(1 - \frac{3t_i}{2R_i} + \frac{t_i^2}{R_i^2} - \frac{t_i^3}{4R_i^3} \right) \left(\delta + \sin \delta \cos \delta - \frac{2 \sin^2 \delta}{\delta} \right) + \frac{t_i^2 \sin^2 \delta}{3R_i^2 \delta \left(2 - \frac{t_i}{R_i} \right)} \left(1 - \frac{t_i}{R_i} + \frac{t_i^2}{6R_i^2} \right) \right], \quad (5.3)$$

$$I_{z,p,i} = R_i^3 t_i \left(1 - \frac{3t_i}{2R_i} + \frac{t_i^2}{R_i^2} - \frac{t_i^3}{4R_i^3} \right) (\delta - \sin \delta \cos \delta),$$

$$y_{c,i} = R_i \left[1 - \frac{2 \sin \delta}{3\delta \left(2 - \frac{t_i}{R_i} \right)} + \left(1 - \frac{t_i}{R_i} \right) \frac{2 \sin \delta - 3\delta \cos \delta}{3\delta} \right]. \quad (5.4)$$

Das deviatorische Flächenträgheitsmoment berechnet sich zu:

$$I_{yz,p,i} = -\frac{1}{8} \sin^2 2\delta \left(R_i^4 - (R_i - t_i)^4 \right). \quad (5.5)$$

Mit den Transformationsgleichungen aus [94]:

$$I_{\eta,p,ij} = \frac{I_{y,i} + I_{z,i}}{2} + \frac{I_{y,i} - I_{z,i}}{2} \cos 2\varphi + I_{yz,i} \sin 2\varphi,$$

$$I_{\zeta,p,ij} = \frac{I_{y,i} + I_{z,i}}{2} - \frac{I_{y,i} - I_{z,i}}{2} \cos 2\varphi - I_{yz,i} \sin 2\varphi,$$

$$I_{\eta\zeta,p,ij} = -\frac{I_{y,i} - I_{z,i}}{2} \sin 2\varphi + I_{yz,i} \cos 2\varphi.$$

werden in Abhängigkeit der Lage des betrachteten Kreisringsegmentes in das Rohrkoordinatensystem transformiert. Über den Satz von Steiner werden die $m \times n$ Partialflächenträgheitsmomente aufsummiert:

$$I_y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(I_{\eta,p,ij} + z_{s,ij}^2 A_i \right),$$

$$I_z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(I_{\zeta,p,ij} + y_{s,ij}^2 A_i \right),$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(I_{\eta\zeta,p,ij} - y_{s,ij} z_{s,ij} A_i \right),$$

mit der Fläche $A_i = \delta (2R_i - t_i) t_i$.

5.3.2 Bestimmung der Steifigkeiten der Einzelschicht

Die Berechnung der Steifigkeit erfolgt über die klassische Laminattheorie, welche unter anderem in [98], [3] und [11] beschrieben wird.

Bei einer Biegebeanspruchung des Rohres werden die Elemente hauptsächlich gedehnt oder gestaucht, sie werden jedoch selbst nicht auf Biegung belastet, sodass eine Modellierung als Plattenelement nicht nötig ist. Die Kreisringsegmente werden im Weiteren als Scheibenelemente modelliert.

Eine einzelne UD-Schicht ist transversal isotrop, welches einen Sonderfall der Orthotropie darstellt. Es wird somit angenommen, dass das Materialverhalten in der x_2 - x_3 -Ebene isotrop ist und somit keine Richtungsabhängigkeit besitzt. In Abbildung 5.14 ist die isotrope Ebene sowie die zugehörigen Spannungen an einem isotropen Element dargestellt. Die Anzahl der unabhängigen elastischen Größen verringert sich somit von 21 bei anisotropen bzw. 9 bei orthotropen Materialverhalten auf 5 unabhängige Größen [4].

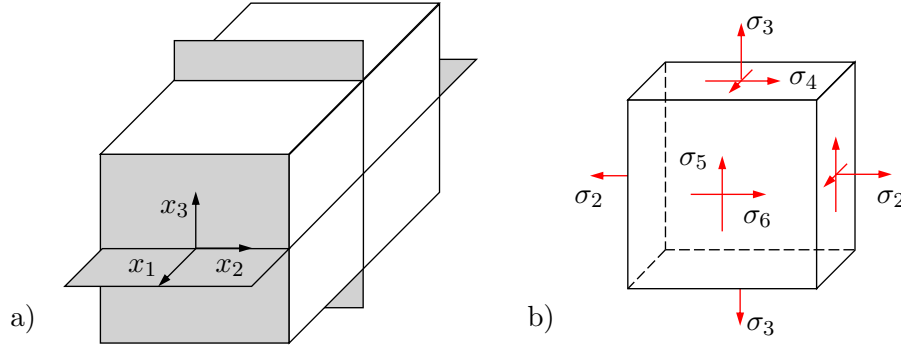


Abbildung 5.14: Transversale Isotropie; a) Isotropieebene x_2 - x_3 ; b) isotrope Scheibe mit Spannungen σ_2 , σ_3 und den Schubspannungen $\sigma_4 = \tau_{23}$, $\sigma_5 = \tau_{31}$ und $\sigma_6 = \tau_{12}$ (vgl. [4])

Für transversale Isotropie in der x_2 - x_3 -Ebene lautet die Spannungs-Dehnungsbeziehung:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot (S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}}_{\text{allgemeine Nachgiebigkeitsmatrix } \mathbf{S}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

sowie in Kurzform:

$$\varepsilon = \mathbf{S} \sigma .$$

Beim ebenen Spannungszustand in der x_1 - x_2 -Ebene wird die Spannung in Dickenrichtung sowie die zugeordneten Schubspannungen zu Null. Aufgrund der Vernachlässigung der Querdehnungseinflüsse der Spannungen in Dickenrichtung werden die Nachgiebigkeits- und Steifigkeitsmatrix zur reduzierten Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{S} und reduzierten Steifigkeitsmatrix \mathbf{Q} [31].

5. Vereinfachte Festigkeitsbewertung geschichteter Rohre unter verallgemeinerter Belastung

Es ergibt sich mit $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$ die Spannungs-Dehnungsbeziehung:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}}_{\text{reduzierte Nachgiebigkeitsmatrix } \mathbf{S}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix},$$

bzw. in Ingenieurgrößen:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_1^{-1} & -\nu_{12}E_1^{-1} & 0 \\ -\nu_{12}E_1^{-1} & E_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^{-1} \end{bmatrix}}_{\text{reduzierte Nachgiebigkeitsmatrix } \mathbf{S}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}.$$

Durch Invertierung der reduzierten Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{S} erhält man die reduzierte Steifigkeit \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix},$$

mit den Komponenten:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \end{aligned}$$

und

$$Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} = G_{12}.$$

Materialkennwerte zur Auslegung können mit [107] berechnet oder aus Tabellen entnommen werden. Die Abbildung 5.15 zeigt das um den Winkel α gedrehte 12-Faserkoordinatensystem gegenüber dem globalen xy -Koordinatensystem.

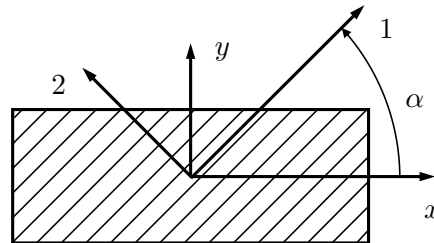


Abbildung 5.15: Globales Koordinatensystem (xy) und Faserkoordinatensystem (12) mit Faserwinkel α (vgl. [98])

Damit die einzelnen UD-Lagen zu einem Mehrschichtverbund überlagert werden können, müssen die reduzierten Steifigkeitsmatrizen \mathbf{Q} in das xy -Koordinatensystem transformiert werden:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}_{\sigma_{12} \rightarrow xy} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}_{\varepsilon_{xy} \rightarrow 12},$$

mit den Transformationsmatrizen:

$$\mathbf{T}_{\sigma_{12} \rightarrow xy} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ 0,5 \sin 2\alpha & -0,5 \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{T}_{\varepsilon_{xy} \rightarrow 12} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 0,5 \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -0,5 \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

5.3.3 Bestimmung der Steifigkeiten des Laminates

Die Abbildung 5.16 zeigt ein infinitesimales Element des Mehrschichtenverbundes.

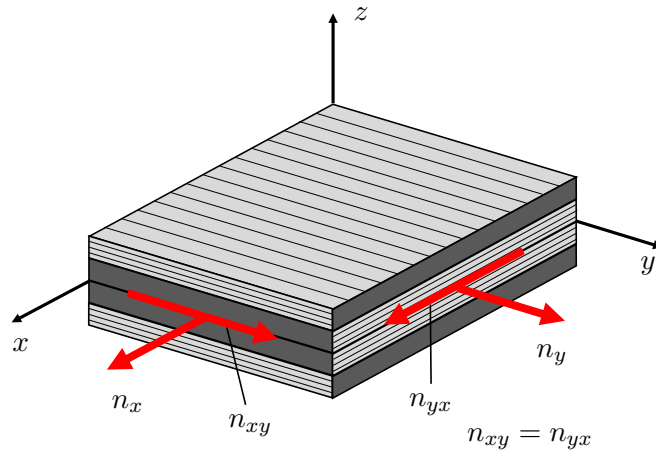


Abbildung 5.16: Ebener Spannungszustand an einem Mehrschichten-Laminat als Scheibenelement (vgl. [98])

Werden die auf das Laminat wirkenden Schnittkräfte \mathbf{N} auf die Laminatbreite b bezogen, folgen daraus die Linienkräfte \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{b} \cdot \mathbf{N},$$

mit

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}$$

und den Schnitt-Normalkräften N_x , N_y und der Schnitt-Schubkraft N_{xy} [98].

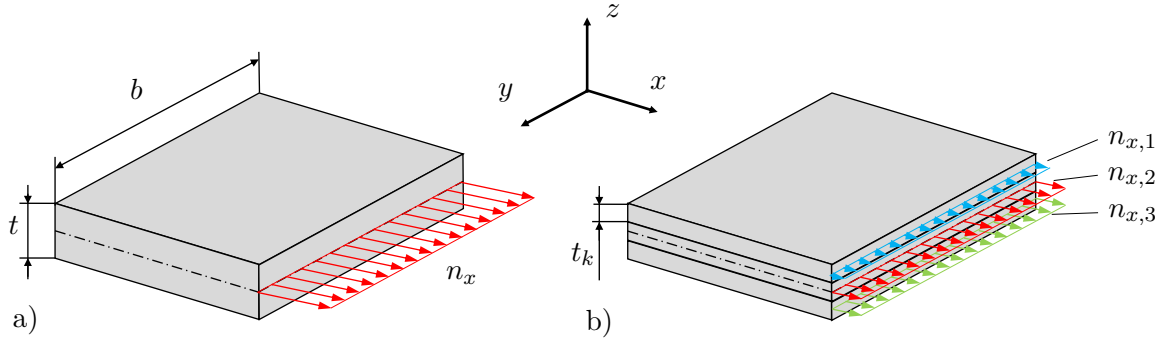


Abbildung 5.17: Kräfteäquivalenz zw. Laminat und Einzelschichten; a) Kraftfluss n_x auf Laminatmittelebene; b) Schicht-Kraftflüsse $n_{x,1}$, $n_{x,2}$ und $n_{x,3}$ (vgl. [98])

In Abbildung 5.17 a) ist der Kraftfluss n_x , der als Linienkraft in der Laminatmittelebene wirkt, dargestellt. Die Abbildung 5.17 b) zeigt die in den Mittelebenen der Einzelschichten wirkenden Kraftflüsse $n_{x,1}$, $n_{x,2}$ und $n_{x,3}$. Zwischen beiden Darstellungen herrscht an den jeweiligen Schnittufern Kräfteäquivalenz, sodass die Summe der Schichtkraftflüsse dem Kraftfluss der Einzelschicht entsprechen:

$$\begin{aligned} n_x &= \sigma_x \cdot t = \sum_{k=1}^n n_{x,k} = \sum_{k=1}^n \sigma_{x,k} \cdot t_k, \\ n_y &= \sigma_y \cdot t = \sum_{k=1}^n n_{y,k} = \sum_{k=1}^n \sigma_{y,k} \cdot t_k, \\ n_{xy} &= \tau_{xy} \cdot t = \sum_{k=1}^n n_{xy,k} = \sum_{k=1}^n \sigma_{xy,k} \cdot t_k. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die Einzelschichten sind ideal miteinander verbunden, sodass die Deformationen für alle Schichten identisch sind:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,k} &= \varepsilon_x, \\ \varepsilon_{y,k} &= \varepsilon_y, \\ \gamma_{xy,k} &= \gamma_{xy}. \end{aligned}$$

Aus dem Elastizitätsgesetz:

$$\sigma = Q\varepsilon$$

und den Gleichungen 5.8 kann die Spannungs-Dehnungsbeziehung für ein Laminat abgeleitet werden:

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{11,k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{12,k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{16,k} \cdot t_k \\ \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{12,k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{22,k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{26,k} \cdot t_k \\ \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{16,k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{26,k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{66,k} \cdot t_k \end{bmatrix}}_{\text{Scheibensteifigkeit } \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Die Berechnung der Komponenten A_{ij} der Scheibensteifigkeit \mathbf{A} erfolgt über die Aufsummation der gedrehten reduzierten Steifigkeiten:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij,k} t_k .$$

Analog zum Abschnitt 5.3.1 zur Berechnung der Flächenträgheitsmomente wird die Steifigkeit nicht direkt für den vollen Rohrquerschnitt berechnet, sondern die Einzelsteifigkeiten der Kreisringsegmente werden aufsummiert. Die Abbildung 5.18 zeigt ein Kreisringsegment mit den relevanten Abmessungen.

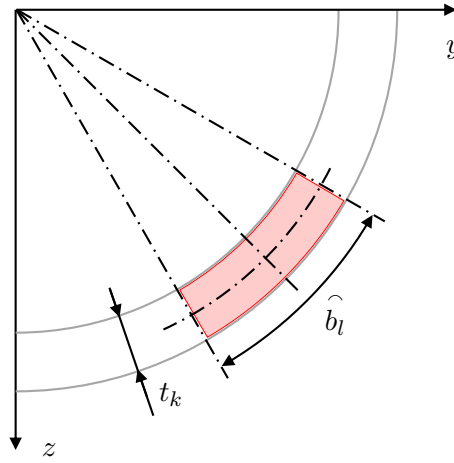


Abbildung 5.18: Kreisringsegment zur Berechnung der Scheibensteifigkeit \mathbf{A}

Ein Kreisringsegment ist ein Abschnitt einer Einzelschicht mit der Kreisbogenlänge \hat{b}_l . Es müssen neben der Dicke der Einzelschicht t_k auch die Breite des Segmentes über das Verhältnis der Kreisbogenlänge \hat{b}_l zum Umfang der Einzelschicht \hat{b}_{Ring} berücksichtigt werden. Die Kreisbogenlängen und Umfänge der jeweiligen Segmente bzw. Schichten beziehen sich immer auf die Mittellinien. Die Komponenten der Scheibensteifigkeitsmatrix berechnen sich mit:

$$A_{ij,k,l} = \bar{Q}_{ij,k} t_{k,l} \frac{\hat{b}_l}{\hat{b}_{\text{Ring},l}} . \quad (5.10)$$

Die Komponenten A_{ij} der Scheibensteifigkeitsmatrix \mathbf{A} werden durch Aufsummierung der Partialsteifigkeiten $A_{ij,k,l}$ über die Anzahl der Lagen/Ringe m und den Elementen pro Lage/Ring n berechnet:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n A_{ij,k,l} . \quad (5.11)$$

Aus der Scheibensteifigkeit \mathbf{A} werden zur Verwendung im Übertragungsmatrizenverfahren bzw. in der Finiten-Elemente-Methode die Ingenieur-Konstanten abgeleitet [98, 4]. Aus dem Gleichungssystem 5.9 folgt bei einachsiger Belastung in x -Richtung:

$$\varepsilon_x = (A^{-1})_{11} n_x . \quad (5.12)$$

Aus dem Vergleich des einachsigen Elastizitätsgesetzes 5.12 mit

$$\varepsilon = \sigma / E \quad (5.13)$$

ergibt sich der E-Modul in x -Richtung zu

$$E_x = \frac{1}{(A^{-1})_{11} t} ,$$

mit der Komponente der invertierten Scheibensteifigkeitsmatrix $(A^{-1})_{11}$ und der Gesamtlaminatdicke t . Analog dazu können die weiteren Ingenieur-Konstanten abgeleitet werden:

$$E_y = \frac{1}{(A^{-1})_{22} t} , \quad G_{xy} = \frac{1}{(A^{-1})_{66} t} ,$$

$$\nu_{xy} = -\frac{(A^{-1})_{12}}{(A^{-1})_{22}} , \quad \nu_{yx} = -\frac{(A^{-1})_{12}}{(A^{-1})_{11}} .$$

5.4 Aufteilung der Schnittkräfte und -momente auf die diskretisierten Keisringelemente

Die Abbildung 5.19 zeigt die Ebene, an der die Festigkeitsanalyse des Hybridrohres erfolgt.

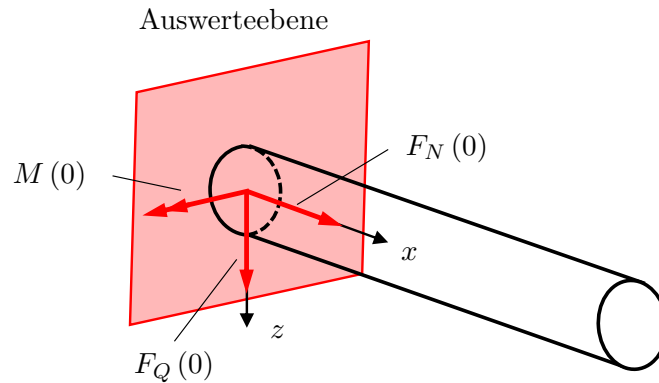


Abbildung 5.19: Ebene zur Auswertung der Spannungen zur Festigkeitsanalyse

Wie bereits in Abschnitt 5.3 beschrieben, wird die Position der Auswerteebene mittels der Schnittgrößenverläufe festgelegt. Die Normal- und Querkraftverläufe sind konstant und beim Biegemomentenverlauf liegen die Extremwerte an den beiden Enden mit dem betragsmäßig höheren Wert bei $x = 0$.

Die Schnittkräfte bei $x = 0$ ergeben sich zu:

$$F_N = 25,6 \text{ kN} ,$$

$$F_Q = 117 \text{ N} ,$$

$$M = -73 \text{ N m} .$$

5.4.1 Aufteilung der Schnittkräfte

Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen den Balkenschnittkräften und -momenten F_N , F_Q und M_y sowie den Schnittkräften n_x und n_{xy} der Kreisringsegmente gesucht werden (siehe Abb. 5.20).

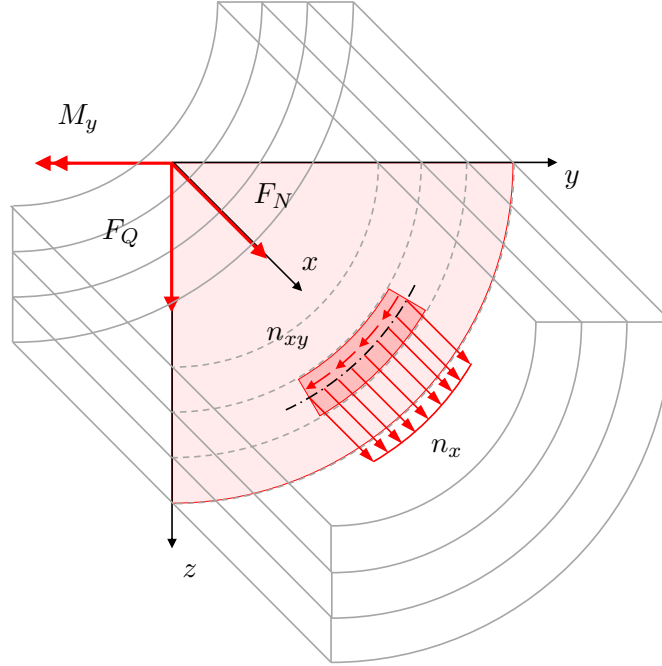


Abbildung 5.20: Schematischer Querschnitt mit eingetragenen Balkenschnittkräften F_N , F_Q und M_y sowie Kreisringsegment zur Festigkeitsanalyse mit Linien-schnittkräften n_x und n_{xy}

In Abschnitt 5.2 wurde bereits die Wirkung der Balkenschnittkräfte und -momente auf den Rohrquerschnitt betrachtet. Mit Gleichungen 5.1 und 5.2 können die auf den Rohrquerschnitt wirkenden ideellen Normal- und Schubspannungen berechnet werden. Der Übersichtlichkeit halber sollen die Gleichungen nochmals dargestellt werden:

$$\bar{\sigma}(z) = \frac{F_N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

und

$$\bar{\tau}(\gamma) = \frac{F_Q}{\pi \cdot r_m \cdot t} \cdot \cos \gamma + \frac{M_T}{I_T} \cdot r_m \cdot$$

Die in Abbildung 5.17 dargestellte Kräfteäquivalenz zwischen dem Laminat und den Einzelschichten muss ebenso zwischen dem Rohrquerschnitt und den Kreisringsegmenten bestehen. Analog zur Gleichung 5.8 können allgemein die Partialspannungen $\sigma_{p,k}$ zur ideellen Spannung $\bar{\sigma}$ aufsummiert werden:

$$\bar{\sigma} = \sum_{k=1}^n \sigma_{p,k} \cdot$$

Zur Berechnung der tatsächlichen Spannung σ_k wird die Wichtung k_k eingeführt, welche das Verhältnis der Partialsteifigkeit des Elementes und der Gesamtsteifigkeit darstellt [49]:

$$k_k = \frac{C_k}{C} ,$$

mit der Partialsteifigkeit C_k und der Gesamtsteifigkeit C . Für die tatsächliche Spannung σ_k gilt somit:

$$\sigma_k = k_k \bar{\sigma} .$$

Übertragen auf das Hybridrohr können die Wichtungen mit den Zwischenergebnissen aus Abschnitt 5.3.2 berechnet werden. Für die Wichtung der Normalkräfte wird aus der Gleichung 5.10 das Element $A_{11,k,l}$ berechnet, welches die Dehnsteifigkeit des Kreisringsegmentes bei Belastung in x -Richtung darstellt. Mit der Gleichung 5.11 werden alle Partialsteifigkeiten aufsummiert und die Dehnsteifigkeit A_{11} des Rohrquerschnittes bei Belastung in x -Richtung berechnet. Es folgt für die Wichtung der Normalkräfte $k_{N,k,l}$:

$$k_{N,k,l} = \frac{A_{11,k,l}}{A_{11}} ,$$

mit dem Index k für die Einzellage und den Index l für das Kreisringsegment des Hybridrohres. Analog dazu werden für die Schubbeanspruchungen die Wichtungen $k_{S,k,l}$ mit den Schubsteifigkeiten $A_{55,k,l}$ und A_{55} berechnet:

$$k_{S,k,l} = \frac{A_{55,k,l}}{A_{55}} .$$

Mit Gleichungen 5.1 und 5.2 sowie den Wichtungen $k_{N,k,l}$ und $k_{S,k,l}$ und dem Zusammenhang $n_x = \sigma_x \cdot t$ bzw. $n_{xy} = \tau_{xy} \cdot t$ aus den Gleichungen 5.8 folgen die Partial-Linienkräfte $n_{x,k,l}$ und $n_{xy,k,l}$ für die Kreisringsegmente:

$$n_{x,k,l} = k_{N,k,l} \cdot \left(\frac{F_N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{k,l} \right) \cdot t_k , \quad (5.14)$$

$$n_{xy,k,l} = k_{S,k,l} \cdot \left(\frac{F_Q}{\pi \cdot r_{m,k} \cdot t_k} \cdot \cos \gamma + \frac{M_T}{I_T} \cdot r_{m,k} \right) \cdot t_k \quad (5.15)$$

mit

$$r_{m,k} = \sqrt{y_{k,l}^2 + z_{k,l}^2}$$

und

$$\gamma = \arctan \left(\frac{z_{k,l}}{y_{k,l}} \right) .$$

Bei dreidimensionalen Belastungen gilt für die Partial-Linienkräfte $n_{x,k,l}$ die Gleichung:

$$n_{x,k,l} = k_{N,k,l} \cdot \left(\frac{F_N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{k,l} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{k,l} \right) \cdot t_k . \quad (5.16)$$

5.4.2 Berechnung der Spannungen und Dehnungen

Mit der Gleichung 5.10 für die partiellen Steifigkeiten ergibt sich das Elastizitätsgesetz:

$$\begin{bmatrix} n_{x,k,l} \\ n_{y,k,l} \\ n_{xy,k,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11,k,l} & A_{12,k,l} & A_{16,k,l} \\ A_{12,k,l} & A_{22,k,l} & A_{26,k,l} \\ A_{16,k,l} & A_{26,k,l} & A_{66,k,l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{x,k,l} \\ \varepsilon_{y,k,l} \\ \gamma_{xy,k,l} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Durch Invertierung der Steifigkeitsmatrizen aus 5.17 ergeben sich die Gleichungen der Verzerrungen ε bei bekannten Schnittkräften \mathbf{n} :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x,k,l} \\ \varepsilon_{y,k,l} \\ \gamma_{xy,k,l} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_{k,l})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} n_{x,k,l} \\ n_{y,k,l} \\ n_{xy,k,l} \end{bmatrix}.$$

Durch Rücktransformation können die Verzerrungen im 12-Koordinatensystem berechnet werden:

$$\sigma_{12,k,l} = \mathbf{Q}_{k,l} \cdot \mathbf{T}_{\varepsilon_{xy} \rightarrow 12} \cdot \varepsilon_{xy,k,l}. \quad (5.18)$$

5.5 Elementweise Versagensbewertung

Die Bewertung der Schädigung der Faserverbundummantelung erfolgt mit einem Versagenskriterium. Bekannte Kriterien sind das Tsai-Hill-Pauschalkriterium [114], das Tsai-Wu-Pauschalkriterium in Tensorform [115], das Hashin-Kriterium [54] und das Puck-Kriterium [88]. Die beiden zuerst genannten Kriterien sind sogenannte Pauschalkriterien, dass heißt diese lassen keine Aussage über die Versagensart zu, während letztere den Versagensmodus voraussagen.

In dieser Arbeit kommt das Hashin-Kriterium zur Anwendung, da dieses in der Literatur häufig zur Modellierung von Schädigung verwendet wird [125, 105, 121]. Für die Herleitung des Kriteriums wird auf die Literatur verwiesen [54, 31].

5.5.1 Schädigungsbeginn

Zunächst sollen die Gleichungen zur Bestimmung des Schädigungsbeginns betrachtet werden. In Abhängigkeit der Normalspannungen $\hat{\sigma}_1$ und $\hat{\sigma}_2$ sowie der Schubspannung $\hat{\tau}_{12}$ werden die Funktionswerte über folgende Gleichungen bestimmt:

- Faser-Zugversagen $\hat{\sigma}_1 > 0$:

$$f_{1,k,l} = \left(\frac{\hat{\sigma}_1}{X_t} \right)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}_{12}}{S_L} \right)^2. \quad (5.19)$$

- Faser-Druckversagen $\hat{\sigma}_1 < 0$:

$$f_{2,k,l} = \left(\frac{\hat{\sigma}_1}{X_C} \right)^2. \quad (5.20)$$

- Zwischenfaser-Zugversagen $\hat{\sigma}_2 > 0$:

$$f_{3,k,l} = \left(\frac{\hat{\sigma}_2}{Y_t} \right)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}_{12}}{S_L} \right)^2. \quad (5.21)$$

- Zwischenfaser-Druckversagen $\hat{\sigma}_2 < 0$:

$$f_{4,k,l} = \left(\frac{Y_C}{2S_Q} - 1 \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_2}{Y_t} + \left(\frac{\hat{\sigma}_2}{2S_Q} \right)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}_{12}}{S_L} \right)^2. \quad (5.22)$$

mit den Zug- und Druckfestigkeiten in Faserrichtung X_t und X_c , den Zug- und Druckfestigkeiten in Querrichtung Y_t und Y_c sowie den Schubfestigkeiten in Faser- und Querrichtung S_L und S_Q . Die Schädigung beginnt für den Funktionswert $f_{n,k,l} = 1$.

In Abbildung 5.21 ist der Versagenskörper nach dem Hashin-Kriterium für den ebenen Spannungszustand dargestellt. Spannungszustände auf der Oberfläche des Bruchkörpers bewirken den Beginn der Schädigung. In Zugrichtung wird der Schub in der Laminatebene berücksichtigt ①, während das Kriterium in Faser-Druckrichtung zum Maximal-Spannungskriterium wird ②.

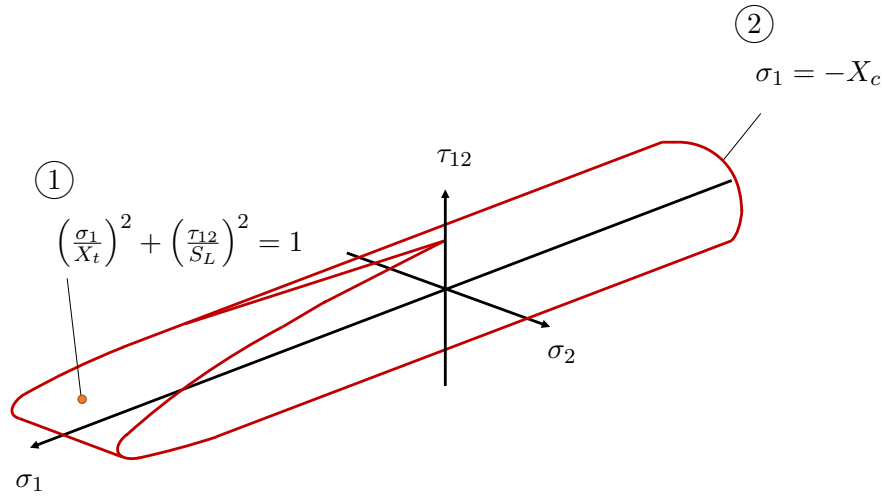


Abbildung 5.21: Versagenskörper nach Hashin für den ebenen Spannungszustand (vgl. [28])

5.5.2 Schädigungsentwicklung

Das verwendete Schädigungsmodell ist [63] entnommen und wird ebenfalls in [9, 93, 68] beschrieben. Die Schädigung der Elemente wird modelliert, indem die Steifigkeit in Abhängigkeit eines Schädigungsparameters reduziert wird [9].

Für die Ersatzspannungen $\hat{\sigma}$ zur Berechnung des Schädigungsbeginns gilt:

$$\hat{\sigma} = \mathbf{M} \sigma,$$

mit den nominellen Spannungen σ und dem Schädigungsoperator \mathbf{M} [74]:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-d_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-d_m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-d_s} \end{bmatrix},$$

mit den Schädigungsparametern für Faserschädigung d_f , Matrixschädigung d_m und Schubschädigung d_s . In Abhängigkeit des Versagensmodus wird der entsprechende Schädigungsparameter verwendet:

$$d_f = \begin{cases} d_f^t & \text{für } \hat{\sigma}_1 > 0 \\ d_f^c & \text{für } \hat{\sigma}_1 < 0 \end{cases},$$

$$d_m = \begin{cases} d_m^t & \text{für } \hat{\sigma}_2 > 0 \\ d_m^c & \text{für } \hat{\sigma}_2 < 0 \end{cases}$$

und

$$d_s = 1 - (1 - d_f^t) (1 - d_f^c) (1 - d_m^t) (1 - d_m^c).$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix \mathbf{S}_D mit berücksichtigter Schädigung über die Schädigungsparameter d_n ergibt sich zu:

$$\mathbf{S}_D = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_f)E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{(1-d_m)E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_s)G} \end{bmatrix}.$$

Durch Invertierung der Nachgiebigkeitsmatrix wird die reduzierte Steifigkeitsmatrix mit Schädigung erhalten:

$$\mathbf{Q}_D = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} (1-d_f)E_1 & (1-d_f)(1-d_m)\nu_{21}E_1 & 0 \\ (1-d_f)(1-d_m)\nu_{12}E_2 & (1-d_m)E_2 & 0 \\ 0 & 0 & D(1-d_s)G \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

mit

$$D = 1 - (1-d_f)(1-d_m)\nu_{12}\nu_{21}.$$

Die Abbildung 5.22 zeigt das Schädigungsmodell zur Bestimmung der Schädigungsparameter d_n , welches auf der im Schädigungsprozess dissipierten Energie basiert.

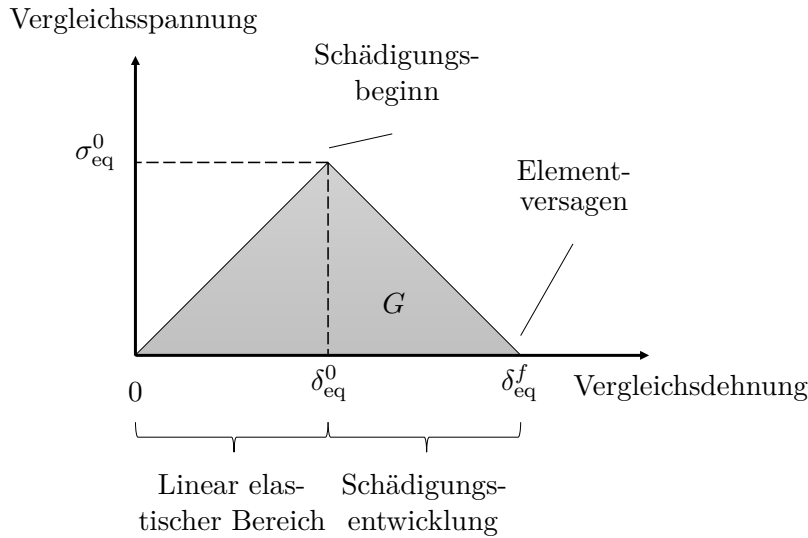


Abbildung 5.22: Energiebasierte Schädigungsentwicklung; Vergleichsdehnung δ_{eq} ; Beginn der Schädigung bei δ_{eq}^0 ; Versagen bei δ_{eq}^f ; Vergleichsspannung bei Beginn der Schädigung σ_{eq}^0 ; Bruchenergie G

5. Vereinfachte Festigkeitsbewertung geschichteter Rohre unter verallgemeinerter Belastung

Die Schädigungsparameter d_n berechnen sich für alle Versagensmodi über die Gleichung:

$$d_n = \frac{\delta_{\text{eq}}^f (\delta_{\text{eq}} - \delta_{\text{eq}}^0)}{\delta_{\text{eq}} (\delta_{\text{eq}}^f - \delta_{\text{eq}}^0)} . \quad (5.24)$$

Die Vergleichsdehnungen und -spannungen werden für die verschiedenen Versagensmodi mit unterschiedlichen Gleichungen berechnet:

- Faser-Zugversagen $\sigma_1 > 0$:

$$\delta_{\text{eq}}^{\text{ft}} = \sqrt{\langle \delta_{11} \rangle^2 + \delta_{12}^2}, \quad \sigma_{\text{eq}}^{\text{ft}} = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle \langle \delta_{11} \rangle + \sigma_{12} \delta_{12}}{\delta_{\text{eq}}^{\text{ft}}} .$$

- Faser-Druckversagen $\sigma_1 < 0$:

$$\delta_{\text{eq}}^{\text{fc}} = \langle -\delta_{11} \rangle, \quad \sigma_{\text{eq}}^{\text{fc}} = \frac{\langle -\sigma_{11} \rangle \langle -\delta_{11} \rangle}{\delta_{\text{eq}}^{\text{fc}}} .$$

- Zwischenfaser-Zugversagen $\sigma_2 > 0$:

$$\delta_{\text{eq}}^{\text{mt}} = \sqrt{\langle \delta_{22} \rangle^2 + \delta_{12}^2}, \quad \sigma_{\text{eq}}^{\text{mt}} = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle \langle \delta_{22} \rangle + \sigma_{12} \delta_{12}}{\delta_{\text{eq}}^{\text{mt}}} .$$

- Zwischenfaser-Druckversagen $\sigma_2 < 0$:

$$\delta_{\text{eq}}^{\text{mc}} = \sqrt{\langle -\delta_{22} \rangle^2 + \delta_{12}^2}, \quad \sigma_{\text{eq}}^{\text{mc}} = \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle \langle -\delta_{22} \rangle + \sigma_{12} \delta_{12}}{\delta_{\text{eq}}^{\text{mc}}} .$$

mit

$$\delta_{ij} = L_c \varepsilon_{ij}$$

und dem Operator:

$$\langle \alpha \rangle = \frac{(\alpha + |\alpha|)}{2} .$$

Die charakteristische Länge L_c des Elementes entspricht bei der Verwendung von Schalenelementen der Länge der Diagonalen [120]. Für die weitere Anwendung zur Festigkeitsbewertung der Kreisringsegmente wird der Wert zu 1 gesetzt.

Die Berechnung der Vergleichsdehnung δ_{eq}^0 und Vergleichsspannung σ_{eq}^0 bei Schädigungsbeginn erfolgt mit den oben berechneten Vergleichsdehnungen δ_{eq} und dem Funktionswert des Hashin-Kriteriums, wobei diese je nach Versagensmodus über die entsprechenden Gleichungen verwendet werden:

$$\delta_{\text{eq}}^0 = \frac{\delta_{\text{eq}}}{\sqrt{f_n}}, \quad \sigma_{\text{eq}}^0 = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\sqrt{f_n}} .$$

Die Berechnung der Vergleichsdehnung δ_{eq}^f bei Versagen erfolgt zusätzlich zu den bekannten Parametern mit der Bruchenergie G :

$$\delta_{\text{eq}}^f = \frac{2G}{\sigma_{\text{eq}}^0} .$$

Die Bruchenergie G kann aus Materialversuchen bestimmt werden. Der Versuchsaufbau sowie die Auswertung sind in [58] und [85] zu finden.

In Abbildung 5.23 ist der Verlauf des Schädigungsparameters d_n in Abhängigkeit der Vergleichsdehnung qualitativ dargestellt. Dieser kann die Werte zwischen 0 (keine Schädigung) und 1 (Versagen) annehmen.

Schädigungsparameter

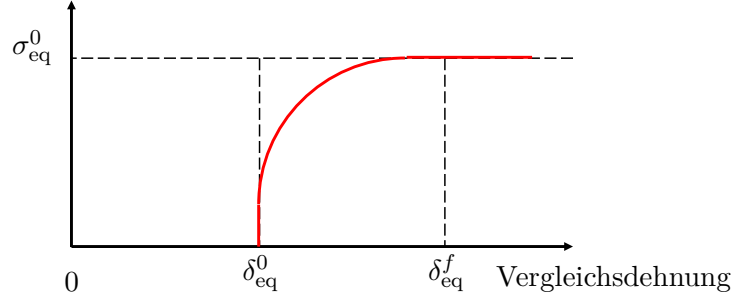


Abbildung 5.23: Qualitativer Verlauf des Schädigungsparameters d_n

5.6 Übertragung von Elementschädigungen auf das globale Strukturverhalten

Das Schädigungsmodell soll auf die Berechnung des Lastfalles übertragen werden. Mit den berechneten Flächenträgheitsmomenten und Steifigkeiten werden die Schnittgrößenverläufe und daraus die Spannungen für jedes Kreisringsegment berechnet. Wird die Festigkeit eines Kreisringsegmentes überschritten, werden die Flächenträgheitsmomente und Steifigkeiten des betreffenden Elementes reduziert und die Berechnung der Schnittgrößenverläufe mit den geänderten Parametern erneut durchgeführt. Dies wird wiederholt bis sich eine Konvergenz einstellt oder alle Elemente versagen.

Berechnung der geschädigten Steifigkeit

Ausgehend von der geschädigten reduzierten Steifigkeit \mathbf{Q}_D (Gleichung 5.23) werden die Schritte zur Berechnung der Scheibensteifigkeitsmatrix abgehandelt. Die geschädigte reduzierte Steifigkeit \mathbf{Q}_D wird in das globale xy -Koordinatensystem transformiert:

$$\bar{\mathbf{Q}}_D = \mathbf{T}_{\sigma_{12} \rightarrow xy} \cdot \mathbf{Q}_D \cdot \mathbf{T}_{\varepsilon_{xy} \rightarrow 12},$$

mit den Transformationsmatrizen aus den Gleichungen 5.6 und 5.7. Mit den Steifigkeiten $\bar{\mathbf{Q}}_{D,k,l}$ der Kreisringsegmente werden die geschädigten Scheibensteifigkeitsmatrizen $\mathbf{A}_{D,k,l}$ berechnet:

$$\mathbf{A}_{D,k,l} = \bar{\mathbf{Q}}_{D,k,l} t_{k,l} \frac{\hat{b}_l}{b_{\text{Ring},l}}.$$

Die Scheibensteifigkeitsmatrix \mathbf{A}_D^{k+1} des neuen Iterationsschrittes $k+1$ ergibt sich über die Aufsummierung der Steifigkeiten $\mathbf{A}_{D,k,l}$:

$$\mathbf{A}_D^{k+1} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \mathbf{A}_{D,k,l}. \quad (5.25)$$

Die Ingenieur-Konstanten lassen sich mit den Beziehungen aus Abschnitt 5.3.3 berechnen.

Berechnung der geschädigten Flächenträgheitsmomente

Analog zu den geschädigten Steifigkeiten werden die partiellen Flächenträgheitsmomente der geschädigten Segmente ebenfalls verringert:

$$I_{D,\eta,p,k,l} = (1 - d_f) I_{\eta,p,k,l} ,$$

$$I_{D,\zeta,p,k,l} = (1 - d_f) I_{\zeta,p,k,l} ,$$

$$I_{D,\eta\zeta,p,k,l} = (1 - d_f) I_{\eta\zeta,p,k,l} ,$$

mit dem Schädigungsparameter für Zug oder Druck:

$$d_f = \max \left(d_f^t, d_f^c \right) .$$

Die partiellen Flächenträgheitsmomente werden über die Anzahl der Lagen m und den Elementen pro Lage n aufsummiert:

$$I_{D,y}^{k+1} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \left(I_{D,\eta,p,k,l} + z_{s,k,l}^2 A_k \right) , \quad (5.26)$$

$$I_{D,z}^{k+1} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \left(I_{D,\zeta,p,k,l} + y_{s,k,l}^2 A_k \right) , \quad (5.27)$$

$$I_{D,yz}^{k+1} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \left(I_{D,\eta\zeta,p,k,l} - y_{s,k,l} z_{s,k,l} A_k \right) . \quad (5.28)$$

Beschreibung anhand eines Fallbeispiels

Die Funktionsweise des Berechnungsablaufes soll qualitativ anhand im Abschnitt 5.1 dargestellten Lastfalles beschrieben werden. Der Übersichtlichkeit halber ist der zu berechnende Balken in Abbildung 5.24 erneut dargestellt.

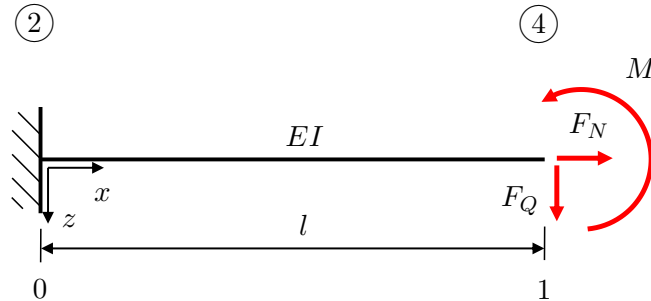


Abbildung 5.24: Balken mit eingetragenen Abmessungen und aufgebracht Lasten

Mit den in Kapitel 4.3.6 errechneten Schnittgrößen und dem in Abschnitt 5.1 beschriebenen Laminataufbau ergeben sich die in Abbildung 5.25 dargestellten Schädigungen am Hybridrohr.

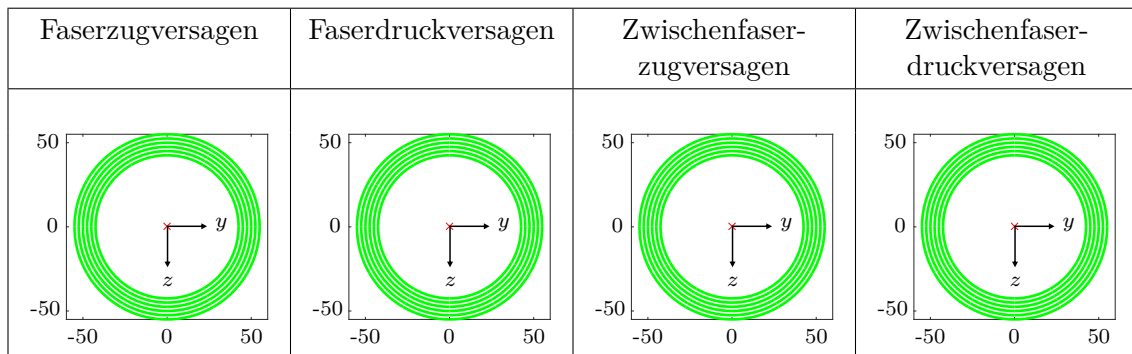


Abbildung 5.25: Festigkeitsbewertung des Hybridrohres

Die Färbung des Querschnitts entspricht der Schädigung. Grün entspricht einem vollständig intakten Segment, gelb einem gefährdeten Segment und ein rot dargestelltes Segment hat versagt. Das Hybridrohr widersteht dem gewählten Lastfall vollständig. Deshalb soll ein weiteres Beispiel mit geänderten Lasten berechnet werden. Hierfür werden die Kräfte auf $F_N = 100 \text{ kN}$ und $F_Q = 1000 \text{ N}$ erhöht.

In Abbildung 5.26 sind die Iterationsschritte der Berechnung dargestellt. Weiterhin sind in der Abbildung 5.27 die Durchsenkungen w der einzelnen Iterationen zu sehen.

1. Iterationsschritt: Zwei Segmente versagen unter der kombinierten Druck- und Biegebelastung, vier weitere Bereiche sind gefährdet. Die Steifigkeit der betroffenen Elemente wird gemäß dem Schädigungsmodells reduziert.
2. Iterationsschritt: Durch das geänderte Steifigkeits-/Flächenträgheitsmoment ergibt sich eine höhere Durchsenkung. Dadurch versagen die ersten beiden Segmente aufgrund des Zuganteils in der Biegebeanspruchung.
3. Iterationsschritt: Durch die weiter reduzierte Steifigkeit/Flächenträgheitsmoment steigt die Durchbiegung und zwei vormals gefährdete Bereiche versagen unter der erhöhten Drucklast aufgrund der Biegung.
4. Iterationsschritt: Weitere Fasern versagen aufgrund Druck- und Zugbeanspruchung. Zusätzlich versagt die Matrix in Segmenten.
5. Iterationsschritt: Weitere Bereiche versagen. Durchsenkung und Segmentschädigungen konvergieren jedoch.

Durch die Aufteilung des Rohrquerschnitts in Kreisringsegmente und der iterativen Berechnung wird ersichtlich, dass das Hybridrohr trotz Versagen einzelner Segmente der Belastung standhält. Andernfalls könnte das Hybridrohr nur auf ein „first ply failure“, also das Versagen einer einzigen Schicht, überprüft werden.

Die Schädigung und die daraus folgende Reduzierung der Steifigkeiten/Flächenträgheitsmomente wird aufgrund der Beschränkung auf eine Auswerteebene auf den gesamten Balken angewendet. In Abschnitt 5.7 werden die nötigen Anpassungen kurz beschrieben, um die Schädigung abschnittsweise zu berücksichtigen.

5. Vereinfachte Festigkeitsbewertung geschichteter Rohre unter verallgemeinerter Belastung

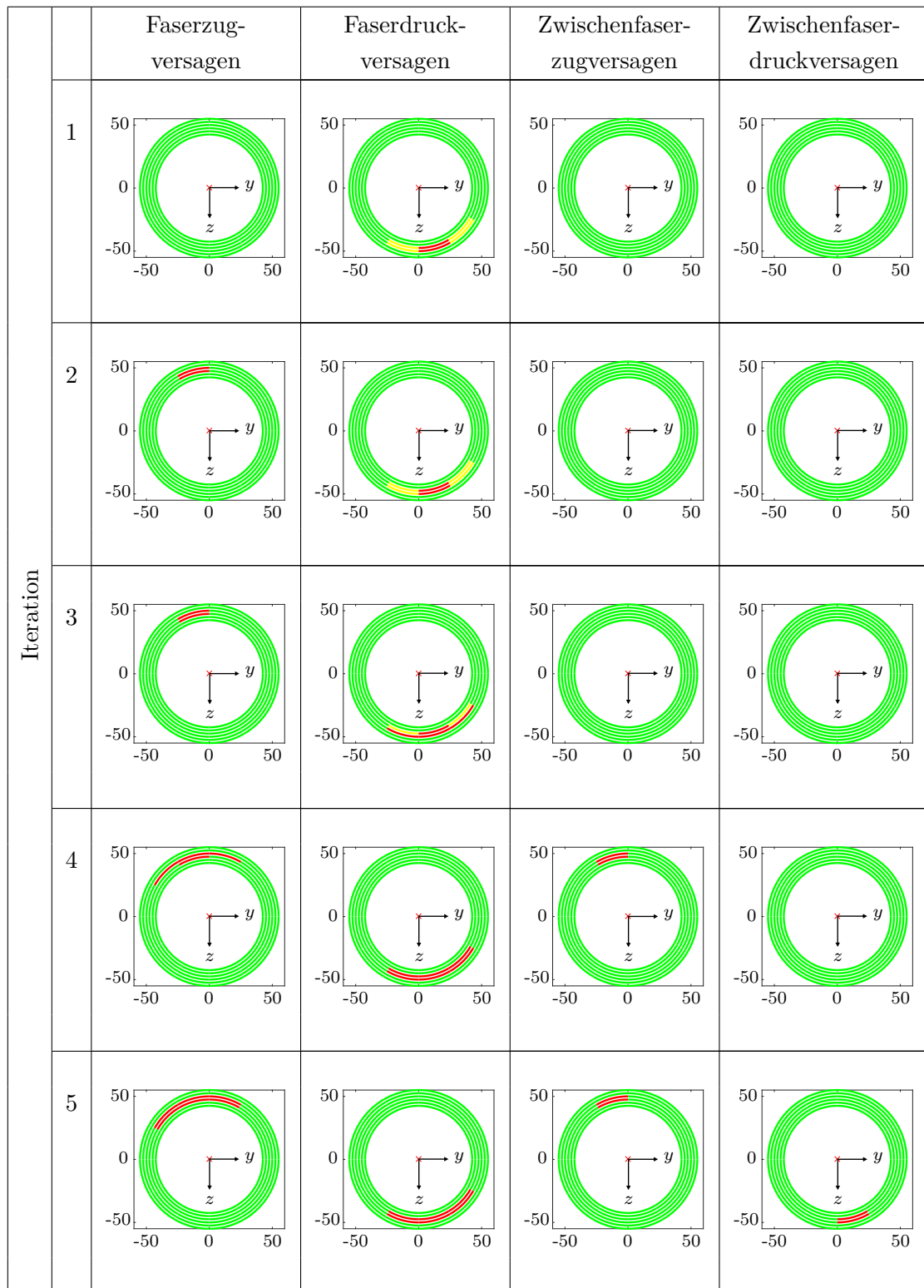


Abbildung 5.26: Festigkeitsbewertung des Hybridrohres - Schädigung

5. Vereinfachte Festigkeitsbewertung geschichteter Rohre unter verallgemeinerter Belastung

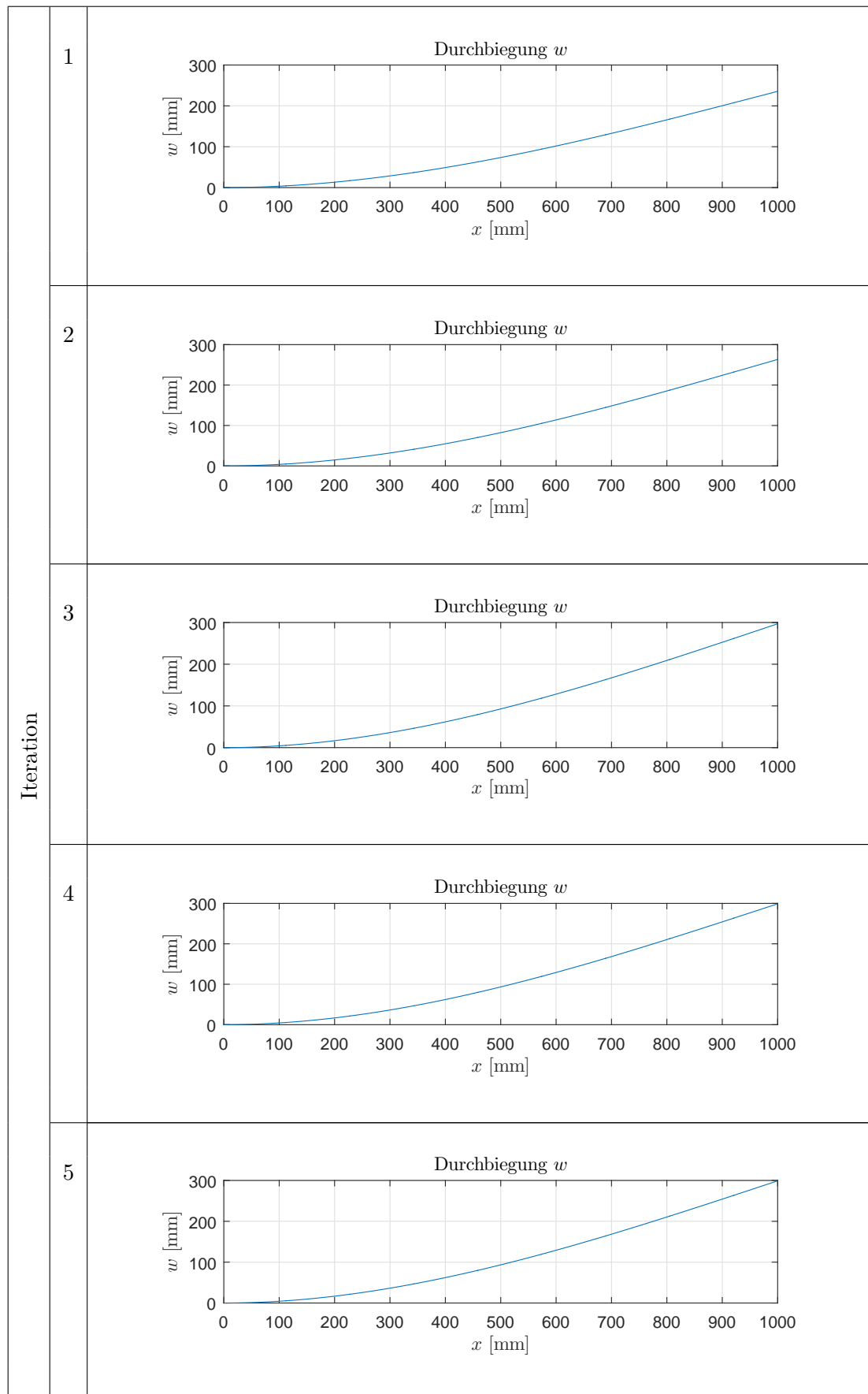


Abbildung 5.27: Festigkeitsbewertung des Hybridrohres - Durchsenkung w

5.7 Verfahren zur iterativen „Optimierung“ des Lagenaufbaus

Die Abbildung 5.28 zeigt den Ablauf für eine iterative Optimierung des Lagenaufbaus.

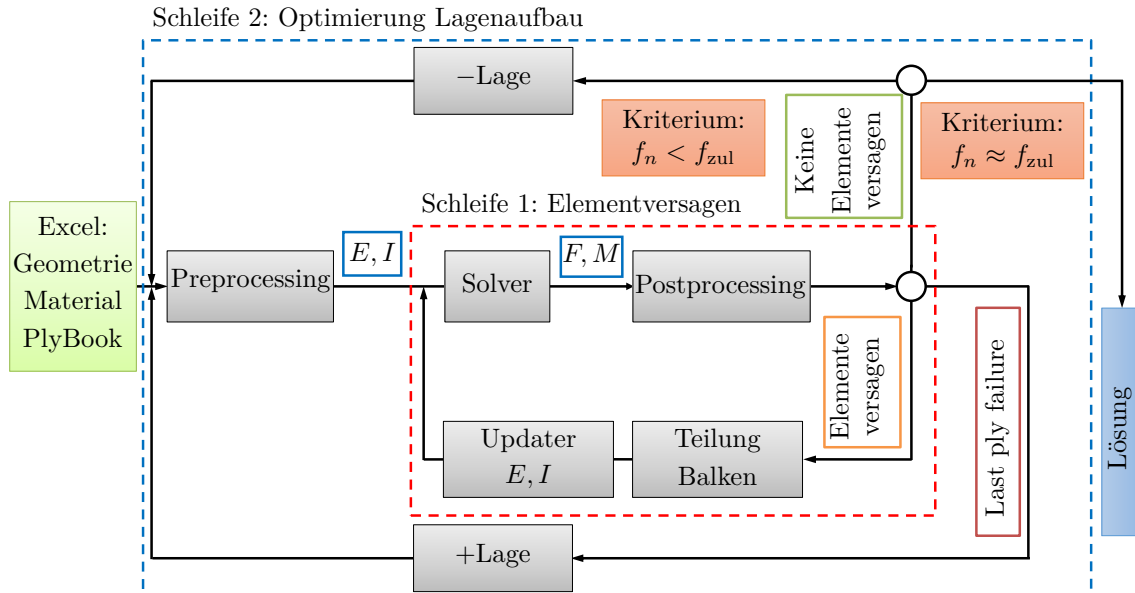


Abbildung 5.28: Ablauf einer iterativen Optimierung des Lagenaufbaus

Zunächst werden die Geometrie und Materialdaten eingelesen und im Preprocessing-Schritt ein Balkenmodell aufgebaut. Aus den Materialdaten und dem Ausgangslagenaufbau werden näherungsweise ein isotroper E-Modul E und die Flächenträgheitsmomente I bestimmt. Der Solver auf Basis einer FE-Methode oder des Übertragungsmatrizen-/Deformationsverfahrens liefert die Schnittkräfte F und -momente M . Im Postprocessing-Schritt werden alle Segmente auf Versagen überprüft.

Für den Fall, dass kein Element versagt, wird die innere Schleife 1 verlassen und in der äußeren Schleife 2 werden die Funktionswerte f_n der Versagenskriterien geprüft. Sind alle Funktionswerte f_n kleiner als der zulässige Wert f_{zul} , ist der Lagenaufbau überdimensioniert. Der Lagenaufbau wird um eine Lage reduziert und nach dem Preprocessing-Schritt wird die Schleife 1 erneut ausgeführt. Liegen die Funktionswerte f_n der Versagenskriterien im zulässigen Bereich, wird die Festigkeit des Lagenaufbaus optimal ausgenutzt und die äußere Schleife 2 wird beendet.

Wenn ein oder mehrere Segmente versagen, werden die Balken unterteilt und weitere Auswerteebenen in den neuen Balkenabschnitten definiert. Zusätzlich werden der E-Modul und die Flächenträgheitsmomente für den jeweiligen Balkenabschnitt unter der Berücksichtigung der Steifigkeitsdegradation neu berechnet. Die zweite Iteration in der inneren Schleife beginnt mit dem erneuten Berechnen der Schnittkräfte und -momente. Diese wird bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums fortgesetzt, welches entweder ein Konvergieren darstellt, also kein weiteres Versagen der Segmente bedeutet, oder das vollständige Versagen eines oder mehrerer Balken. Im Versagensfall wird die Berechnung in der äußeren Schleife fortgesetzt und weitere Lagen hinzugefügt. Die zweite Iteration in der äußeren Schleife beginnt mit der Berechnung des geänderten E-Moduls und der Flächenträgheitsmomente. Das Abbruchkriterium für die äußere Schleife ist erreicht, wenn alle Balken der Belastung standhalten und die Funktionswerte f_n im zulässigen Bereich liegen.

Kapitel 6

Automatisierte Simulation von Balkentragwerken und Implementierung von Knotensteifigkeiten

6.1 Anwendungsfall und Zielsetzung

Bei der Entwicklung des in Kapitel 2.3 vorgestellten Überrollkäfigs hat sich in der Berechnung vor allem die Frage nach der Startgeometrie zur weiteren Optimierung gestellt. Das DMSB-Handbuch lässt als Basiskonfiguration bereits mehrere Geometrien zu und auch die Positionen der Knoten sind nicht festgelegt. Beispielsweise sind für das Türkrenz drei Varianten oder für das Dachkreuz fünf Varianten zu finden (siehe [27] oder [40]).

Eine parametrische Modellierung mittels Flächen im CAD lässt zwar geringfügige Änderungen der Geometrie zu, aber bei zu großen Anpassungen kann das CAD-Modell instabil werden. Weiterhin muss bei jeder Änderung in den CAD-Daten auch die Simulation angepasst werden. Je nach verwendeter FE-Software können dies kleine Anpassungen im Simulationsmodell bis hin zum Neuaufbau der Simulation sein.

Dieser Aufwand kann durch eine zweistufige Auslegung der Geometrie reduziert werden. Im ersten Schritt wird mittels eines auf Balkenelementen-basierenden Näherungsverfahrens die Topologie festgelegt und erst im zweiten Schritt wird das vollständige CAD-Modell aufgebaut, welches beispielsweise zur Zertifizierung oder zur Durchführung von Detailoptimierung berechnet wird. Durch diese Aufteilung lassen sich im Vorfeld viele Varianten prüfen bevor mit dem Aufbau des CAD-Modells begonnen wird, welches dann ebenfalls schon auf der finalen Topologie basiert und somit im weiteren Berechnungsverlauf nur noch Detailanpassungen nötig sein werden.

Neben der Startgeometrie für Neukonstruktionen sind in der Praxis ebenfalls Optimierungen an bestehenden Überrollkäfigen von Interesse. So können durch A-B-Vergleiche verschiedener Topologievarianten oder Änderungen der Knotenpositionen Verbesserungen erzielt werden. Da insbesondere hierbei weniger die absoluten Werte für die Steifigkeit oder Festigkeit, sondern die relativen Änderungen zum bestehenden Modell von Interesse sind, kann ebenfalls ein Näherungsverfahren zur Anwendung kommen. Da Vereinfachungen im Simulationsmodell beide Varianten auf gleiche Weise betreffen kann davon ausgegangen werden, dass sich etwaige Fehler weniger stark auf das Ergebnis auswirken.

Im Folgenden soll somit ein Simulations-Tool entwickelt werden, welches eine schnelle Berechnung von Näherungslösungen von räumlichen Balkentragwerken ermöglicht. Hierzu soll ein skript-gesteuerter Modellaufbau einer FE-Simulation mit Balken-Elementen verwendet werden.

6.2 Auswahl FE-Software

Zur Umsetzung des Simulationstools wird eine FE-Softwareumgebung benötigt, die neben einem Vernetzer und Solver für Balkenelemente ebenfalls die Möglichkeit einer skript-basierten Steuerung des gesamten Simulationsablauf beinhaltet. Die Berechnung der Balkenstruktur stellt hierbei kein Problem dar, da die meisten kommerziellen FE-Programme mit Balkenelementen umgehen können. Die Forderung nach der skript-basierten Programmsteuerung erfüllen beispielsweise die Preprozessoren ANSA [14] und Hypermesh [2] sowie die CAE-Software ABAQUS [24]. Hypermesh kann über die Skriptsprache TCL gesteuert werden. ANSA und Hypermesh verwenden die geläufigere Sprache Python, welche für die weitere Entwicklung präferiert wird. Die Software Hypermesh bietet nur die Funktionalität des Preprocessor, das heißt zum Solver gibt es eine externe Schnittstelle. In der Software ABAQUS CAE sind die Funktionalität des Preprocessor, Solver und Postprozessor integriert. Durch den Entfall dieser externen Schnittstellen wird eine einfachere skript-basierte Steuerung des Programms erwartet.

Auf die Weiterführung der in Kapitel 3 vorgestellten Verfahren muss verzichtet werden. Das Übertragungsmatrizenverfahren kann nicht sinnvoll auf räumliche stark verzweigte Strukturen angewendet werden. Das Deformationsverfahren wäre zwar für räumliche Strukturen geeignet, jedoch wäre die Programmierung von Tool zur automatisierten Erstellung der Steifigkeitsmatrix nötig. Auf die Implementierung des in Kapitel 5 vorgestellten Optimierer für den Lagenaufbau wird ebenfalls verzichtet, da die folgenden Untersuchungen zunächst nur an Tragwerkstrukturen aus Stahl stattfinden sollen.

6.3 Umsetzung in ABAQUS

ABAQUS bietet die Möglichkeit, einzelne oder mehrere Befehle, welche über die CAE-Oberfläche eingegeben werden, aufzuzeichnen. Über den Makro-Manager wird die Aufzeichnung der Befehle gestartet. Diese Befehle werden als Python-Code in einem ASCII-File gespeichert und können mittels eines beliebigen Texteditors direkt bearbeitet werden. Die so erstellten Makros lassen sich wiederum mit dem Makro-Manager in ABAQUS ausführen.

Alternativ zum Makro-Manager können über den Befehl „Run Script“ selbst programmierte Makros oder Skripte ausgeführt werden.

6.3.1 Programmstruktur

Zunächst soll mit Hilfe von Abbildung 6.1 die nötige Ordnerstruktur beschrieben werden. Der übergeordnete Ordner „Series_1“ stellt das Projektverzeichnis dar. Die untergeordneten Ordner „Sim1“ bis „Sim4“ enthalten beispielsweise unterschiedliche Topologien des Tragwerkes, die miteinander verglichen werden sollen. Jeder Ordner enthält die Eingangsdaten in Form mehrerer ASCII-Files:

6. Automatisierte Simulation von Balkentragwerken und Implementierung von Knotensteifigkeiten

- „0_geometry.txt“: Koordinaten der Knoten und Start- und Endknoten der Balken.
- „0_SettingsData.txt“: Parameter die für jede Simulation gesondert definiert werden, z. B. den Namen des Modells oder den zu berechnenden Lastfall.
- „0_MaterialData.txt“: Kennwerte des verwendeten Materials

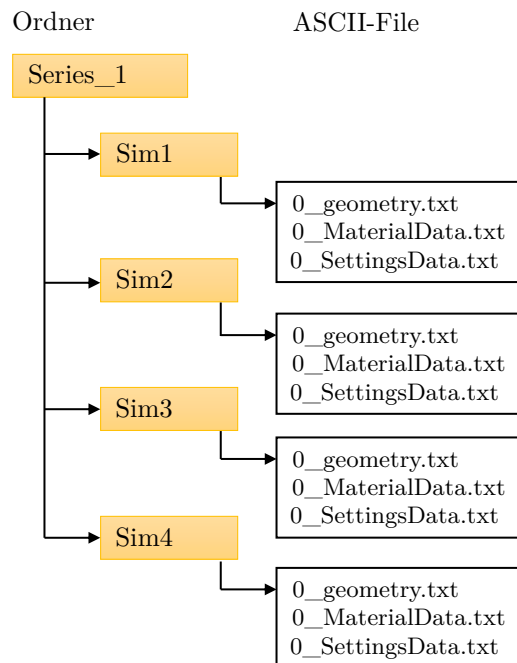


Abbildung 6.1: Ordnerstruktur für Simulation

Ein Projekt wird über mehrere Python-Skripte ausgeführt (siehe Abb. 6.2). Das „Master Script“ ist für die Steuerung der weiteren Skripte zuständig.

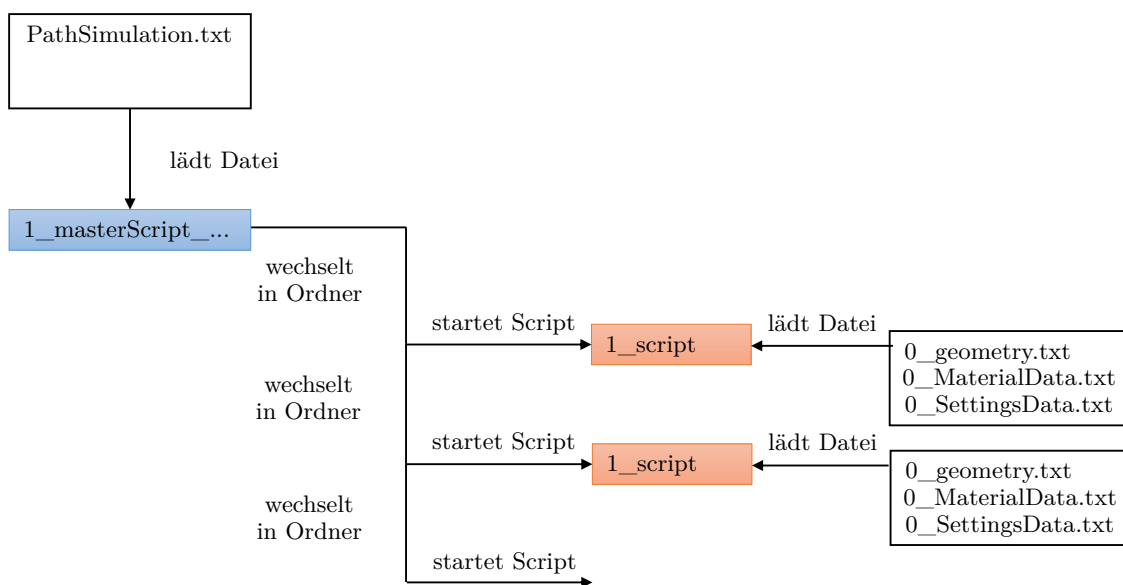


Abbildung 6.2: Übersicht der Funktionsweise der Skripte

Es wird zunächst das ASCII-File „PathSimulation.txt“ mit den Pfaden eingelesen. Entsprechend der Abfolge der eingelesenen Pfade wird in die jeweiligen Ordner gewechselt und das Arbeitsverzeichnis für ABAQUS auf den entsprechenden Ordner gelegt. Weiterhin werden die benötigten Funktions-Skripte kopiert und aufgerufen, beispielsweise das Skript zum Modellaufbau „PreProcessing_SafetyCage“ und das Skript „function“, welches die ausgelagerten Funktionen beinhaltet. Exemplarisch sollen ausgewählte Abschnitte des Skriptes zur Modellerstellung in Kapitel 6.3.2 beschrieben werden.

6.3.2 Modellerstellung

Die Modellerstellung mit dem Skript gleicht weitgehend dem des Simulationsaufbaus mit Hilfe der GUI, jedoch werden einige Rechenschritte zur Aufbereitung der Geometrie von der Python-Laufzeitumgebung durchgeführt. Im Folgenden sollen die Einzelschritte beschrieben werden.

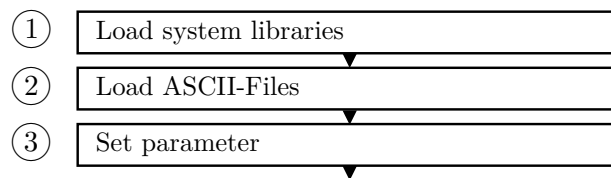


Abbildung 6.3: Python-Skript zur Modellerstellung in ABAQUS (I)

1. Load system libraries

Die System- und ABAQUS-Bibliotheken werden geladen: ABAQUS stellt zum Modellaufbau eigene Bibliotheken zur Verfügung. Diese sind nach den Menüpunkten in der ABAQUS-CAE-Benutzeroberfläche gegliedert. Beispielsweise findet sich in der Bibliothek „mesh“ die Funktion „generateMesh()“ welche die Vernetzung durchführt. Aus den System-Bibliotheken werden hauptsächlich Funktionen zum Anlegen von Ordner oder zum Verknüpfen von Pfaden verwendet, welche für Simulationsserien benötigt werden, die über mehrere Verzeichnisse verteilt sind.

2. Load ASCII-Files

Die Textdateien mit Geometrie, Material, Simulationsparametern usw. werden aus dem Arbeitsverzeichnis geladen: Die Textdateien für Material und Simulationsparametern sind mit festen Zeilen für die Parameter innerhalb der Dateien aufgebaut. Die Einträge der jeweiligen Zeilen können direkt den internen Variablen zugeordnet werden. Die Geometrie-Datei ist nicht nach festen Positionen, sondern nach Keywords gegliedert, da die Anzahl der Knoten/Balken und somit die Positionen innerhalb der Datei variieren. Die weitere Verarbeitung und Zuordnung zu den Variablen findet im Punkt 5a statt.

3. Set parameter

Die aus dem ASCII-File eingelesenen Simulationsparameter wie z. B. Einzelbalken, Elementgröße und spezifische Parameter wie Fahrzeuggewicht und Test werden für den weiteren Modellaufbau den internen Variablen zugeordnet: Diese frei wählbaren Parameter sind auf die Durchführung von Fallstudien ausgerichtet, beispielsweise Berechnungen in Abhängigkeit von verschiedenen Lasten. Die Parameter, welche für jede Simulation konstant sind, werden direkt im Preprocessing-Skript hinterlegt.

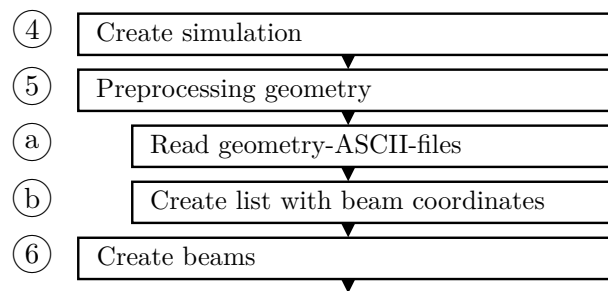


Abbildung 6.4: Python-Skript zur Modellerstellung in ABAQUS (II)

4. Create simulation

Eine Simulation wird in ABAQUS CAE erstellt und mit Variablen verknüpft: Eine neue Simulation wird mittels eines Befehls aus den zuvor geladenen Bibliotheken angelegt, indem der Simulations-Datenbank von ABAQUS eine weitere Variable hinzugefügt wird. Alle weiteren Schritte fügen dieser Variablen weitere Werte hinzu oder verändern diese. Da diese Variable oft angesprochen wird, wird diese der Übersichtlichkeit halber in die kürzere Bezeichnung „Frame“ umbenannt.

5. Preprocessing geometry

a) Read geometry-ASCII-files

Eingelesene Textdatei wird nach „Keywords“ aufgeteilt: Das Geometrie-File wird durch die Keywords „*ID“, „*Section“, „*Node“, „*Element“ und „*End“ gegliedert. Die „*ID“ wird für jedes Bauteil vergeben. Dies ist notwendig um die Bauteile z. B. bezüglich der Kontakte zuzuordnen, wenn die Geometrie aus verschiedenen Dateien eingelesen wird. Über das Keyword „*Section“ wird das Profil des Balkens gewählt (siehe Punkt 10). Unter dem Keyword „*Node“ sind die Nummerierung und Koordinaten der Knoten eingetragen. Je nach Geometrie ist die Anzahl der Knoten unterschiedlich und wird durch das Keyword „*Element“ begrenzt. Ein Eintrag unter dem Keyword „*Element“ entspricht einem Balken welcher über die Anfangs- und Endknotennummer definiert wird. Durch das Keyword „*End“ wird der Einlesevorgang beendet.

b) Create list with beam coordinates

Liste mit den Anfangs- und Endkoordinaten der Balken wird erstellt: Die Anfangs- und Endpunkte der Balken werden den Koordinaten der Knoten über die zuvor beschriebene Nummerierung zugeordnet. Diese Informationen werden in Variablen vom Typ „list“ mit der Größe $n \times 6$ gespeichert, wobei n der Anzahl der Balken entspricht und die Anzahl der Spalten sich aus den drei Anfangs- und den drei Endkoordinaten zusammensetzt.

6. Create beams

Balken werden erzeugt: Ausgehend von der im vorhergehenden Schritt generierten Liste werden die Balken erstellt. Je nach gewählter Option werden alle Balken einem Bauteil hinzugefügt, oder es wird für jeden Balken ein eigenes Bauteil erstellt die dann über Bedingungen verbunden werden.

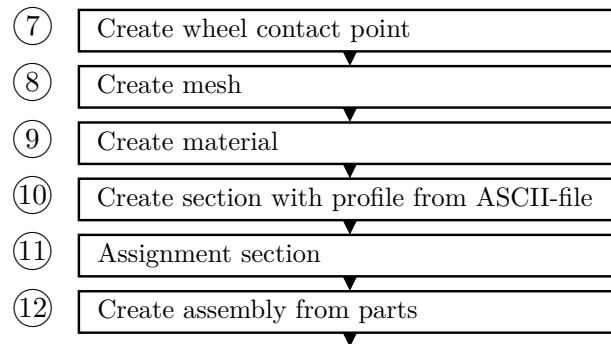


Abbildung 6.5: Python-Skript zur Modellerstellung in ABAQUS (III)

7. Create wheel contact point
Aufstandspunkte der Räder werden erstellt: Beim Torsionssteifigkeitsversuch erfolgt die Krafteinleitung über die vorderen Radaufstandspunkte und die Lagerung über die hinteren Radaufstandspunkte. Bei den statischen Lastfällen erfolgt die Lagerung direkt an der Geometrie, sodass die Radaufstandspunkte nicht benötigt werden.
8. Create mesh
Bauteile werden vernetzt: Den Bauteilen wird ein Balkenelementtyp und eine Netzfeinheit zugewiesen. Während der Balkenelementtyp nur im Preprocessing-Skript geändert werden kann, kann die Netzfeinheit über die eingelesenen Parameter gesteuert werden. Die Vernetzung erfolgt je nach Modellaufbau für jeden Balken einzeln oder für das Gesamttragwerk.
9. Create material
Materialkarten werden mit den Materialparametern erstellt: Der Befehl zur Erstellung der Materialkarte fügt der Simulations-Datenbank eine Variable für das Material hinzu. Dieser werden wiederum die eingelesenen Werte hinzugefügt.
10. Create section with profile from ASCII-file
Section und Profil werden erzeugt: Die sogenannte Section enthält Informationen über die Bauteileigenschaften, z. B. das Material oder den Querschnitt bei Balkenelementen. Die Section wird mit einem Befehl als Variable der Simulations-Datenbank hinzugefügt und dieser ein zuvor definiertes Material und Profil zugeordnet.
11. Assignment section
Section wird den Balken oder dem Bauteil zugeordnet: Die Zuordnung der Section erfolgt über den in Punkt 5a betrachteten Keyword „*Section“. So kann z. B. wenn das Tragwerk aus zwei Bauteilen besteht jedem Bauteil ein eigenes Material oder Profil zugewiesen werden.
12. Create assembly from parts
Assembly wird erstellt: Die einzelnen Bauteile („parts“) werden zu einer Baugruppe („assembly“) zusammengefügt, welche dem zu berechnenden Modell entspricht. Die Baugruppe kann ein oder mehrere verschiedene zuvor erstellte Bauteile beinhalten. Ebenso kann ein einzelnes Bauteil mehrfach in modifizierter Form enthalten sein, z. B. ein Rad, welches als einzelnes Bauteil vernetzt und vier Mal in die Baugruppe eingefügt wird.

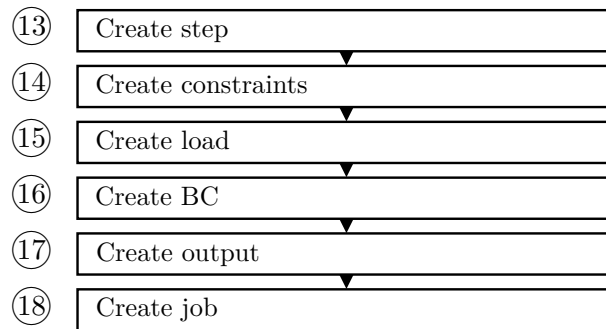


Abbildung 6.6: Python-Skript zur Modellerstellung in ABAQUS (IV)

13. Create step

Simulationszeitschritt wird mit Endzeit aus den eingelesenen Parametern erstellt: Die Berechnung wird explizit durchgeführt. Hierfür wird dem initialen Zeitschritt ein weiterer Zeitschritt t_{end} hinzugefügt. Alle Definitionen, welche die komplette Simulation über andauern sollen, wie zum Beispiel den Randbedingungen, werden im initialen Zeitschritt definiert. Zeitlich veränderliche Vorgaben, etwa die äußeren Lasten werden für den zweiten Zeitschritt definiert.

14. Create constraints

Verknüpfungen wie zum Beispiel Tie-Verbindungen oder Gelenkverbindungen zwischen den Balken und dem Referenzpunkt oder Verknüpfungen zwischen den Randaufstandspunkten und dem Überrollkäfig werden generiert. Diese werden nur beim Torsionssteifigkeitsversuch (siehe Abschnitt 6.4) oder der Modellerstellung mit Einzelbalken benötigt.

15. Create load

Verschiebungen oder Kräfte werden je nach gewählter Option auf die Geometrie aufgebracht: Die räumlich wirkenden Kräfte werden über die Zerlegung in die Kraftkomponenten in den jeweiligen Raumrichtungen modelliert. Die Lasteinleitung erfolgt bilinear, wobei bei $t = 0,8 \cdot t_{\text{end}}$ die maximale Kraft erreicht wird. Die Kraft wird anschließend gehalten bis etwaige Schwingungen abgeklungen sind.

16. Create BC

Die Randbedingungen werden definiert: Je nach Versuch werden die Randbedingungen unterschiedlich definiert. Bei den statischen Versuchen werden die Aufstandspunkte des Überrollkäfigs auf der Karosserie fixiert. Beim Torsionssteifigkeitsversuch werden nur die Freiheitsgrade der beiden hinteren Radaufstandspunkte gesperrt.

17. Create output

Ausgabegrößen werden definiert: Es können sogenannte „History output“ und „Field output“ definiert werden. „History output“ geben den Verlauf einer Größe über die Zwischenzeitschritte der Berechnung aus. Ein „Field output“ gibt die Größe an allen Punkten des gewählten Bereiches aus, jedoch nur zu einem Zeitschritt. Ein möglicher Einsatzbereich für „History output“ ist beispielsweise die Durchsenkung am Kraftangriffspunkt über die einzelnen Zeitschritte. Die im Weiteren gezeigten Verschiebungsfelder sind beispielsweise „Field output“ der Verschiebung für den letzten Zeitschritt.

18. Create job

Input-File zur Berechnung mit ABAQUS wird geschrieben: Das Input-File im ASCII-Format enthält alle Daten zur Simulation in einer für den Solver lesbaren Form. Die Simulation kann über die Benutzeroberfläche, dem Skript oder über die Konsole gestartet werden.

6.4 Fallstudien

Für eine Fallstudie werden ausgehend von einem Referenz-Überrollkäfing vier neue Varianten mit geänderter Topologie abgeleitet (siehe Abb. 6.7).

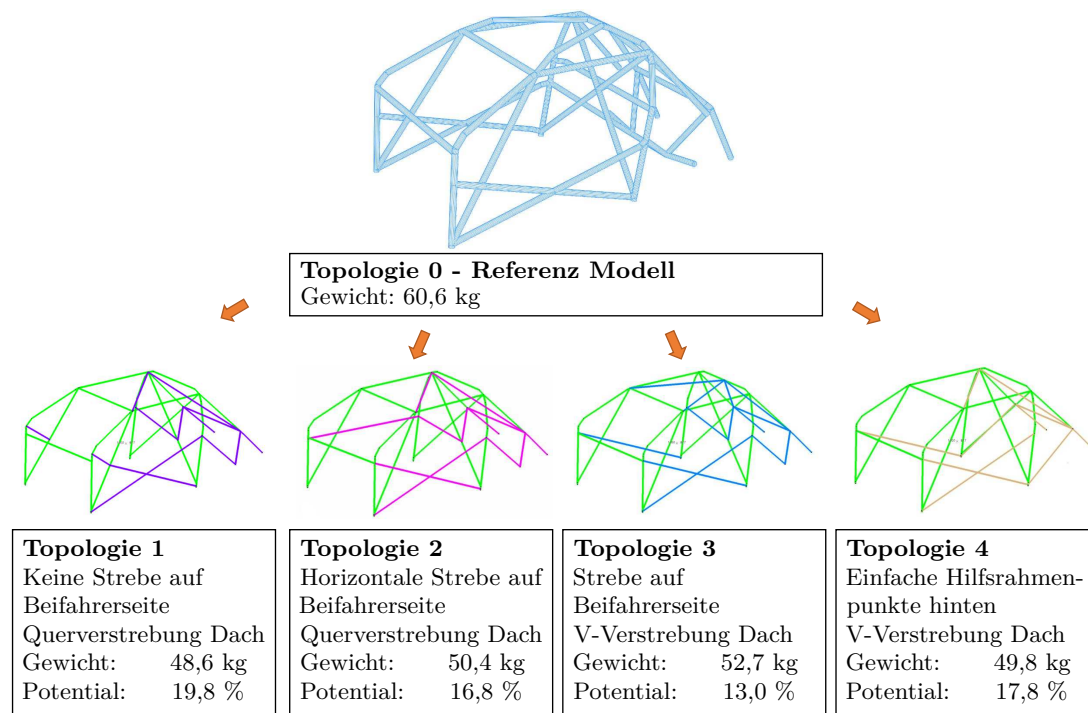


Abbildung 6.7: Referenzüberrollkäfing mit zu untersuchenden Topologien

Der Überrollkäfing in der Topologie-Variante 0 dient als Referenzmodell. Die zu untersuchenden Topologien werden abgeleitet, indem ein Basis-Rahmen erstellt wird (in grün dargestellt) und verschiedene Varianten der Verstrebungen eingebracht werden. Durch eine geringere Anzahl an Verstrebungen der neuen Varianten ergibt sich eine mögliche Gewichtseinsparung von 13 - 20 %, jedoch ist ebenfalls ein Steifigkeitsverlust zu erwarten. Die Abwägung zwischen Gewicht/Steifigkeit wird nach den Einsatzbedingungen getroffen. Für alle Varianten wird ein einheitlicher Rohrquerschnitt von $\varnothing 40 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ gewählt. Die Fallstudien beschränken sich auf Stahl als Werkstoff für die Rohre.

Festigkeitsnachweis

Alle Varianten werden auf die Einhaltung der beiden zertifizierungsrelevanten Lastfälle aus Abschnitt 2.7 und 2.8 überprüft. Das Simulationsmodell mit den eingetragenen Kräfte- und Randbedingungen ist in Abbildung 6.8 dargestellt.

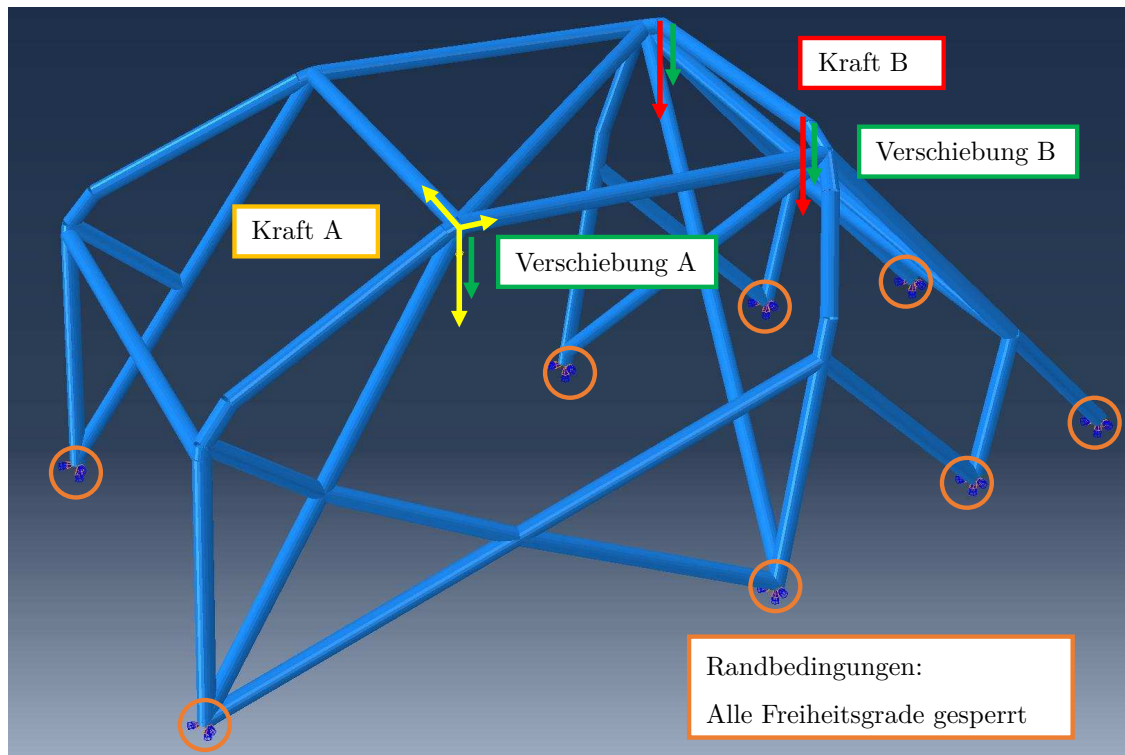


Abbildung 6.8: Modellaufbau - Quasi-statischer Lastfall

Der Überrollkäfig ist in allen Varianten an den in orange markierten Punkten fest gelagert, wobei sowohl Verschiebungen als auch die rotatorischen Freiheitsgrade gesperrt sind. Die Lasteinleitung erfolgt durch die Aufbringung von Einzelkräften. Im Fall der Prüfung des Frontbügels durch die Kraftkomponenten in den entsprechenden Raumrichtungen, um die in Abschnitt 2.7 geforderte Lastrichtung darzustellen. Diese Kraftkomponenten werden in Abbildung 6.8 mit „Kraft A“ bezeichnet. Der zweite Lastfall wird zur Prüfung des Hauptbügels durch zwei gleich große Einzelkräfte in die negative z -Richtung modelliert. Diese sind in der Abbildung als „Kraft B“ beschriftet. Beide Lastfälle werden getrennt untersucht.

Die Auswertung erfolgt über die zugehörige Verschiebung in z -Richtung der Kraftangriffspunkte. Der Festigkeitsnachweis gilt als erbracht, wenn die Verschiebung in z -Richtung kleiner als die im Reglement (siehe Abschnitt 2.7 bis 2.8) vorgeschriebenen maximalen Verschiebung ist. Eine Auswertung der Spannungen ist vom Reglement nicht vorgeschrieben und erfolgt in der Fallstudie zur Bestimmung der Topologie nur über den Vergleich der maximalen Spannung mit der Bruchfestigkeit des verwendeten Materials. Eine detaillierte Auswertung der Spannungen wird jedoch im nachfolgenden Schritt zur Detailoptimierung mittels eines Schalenmodells empfohlen. Die Bestimmung der Prüfkraft erfolgt zu:

$$F_{A\text{-Säule}} = 35 \cdot w \text{ N kg}^{-1},$$

$$F_{B\text{-Säule}} = 75 \cdot w \text{ N kg}^{-1},$$

mit

$$w = 1400 \text{ kg} + 150 \text{ kg}.$$

Torsionssteifigkeit

In Abbildung 6.9 sind die Randbedingungen für den Torsionslastfall dargestellt. Dieser Lastfall ist nicht relevant für die Zertifizierung, jedoch stellt die Erhöhung der Torsionssteifigkeit der Karosserie durch den Überrollkäfig den Hauptnutzen im Fahrbetrieb dar.

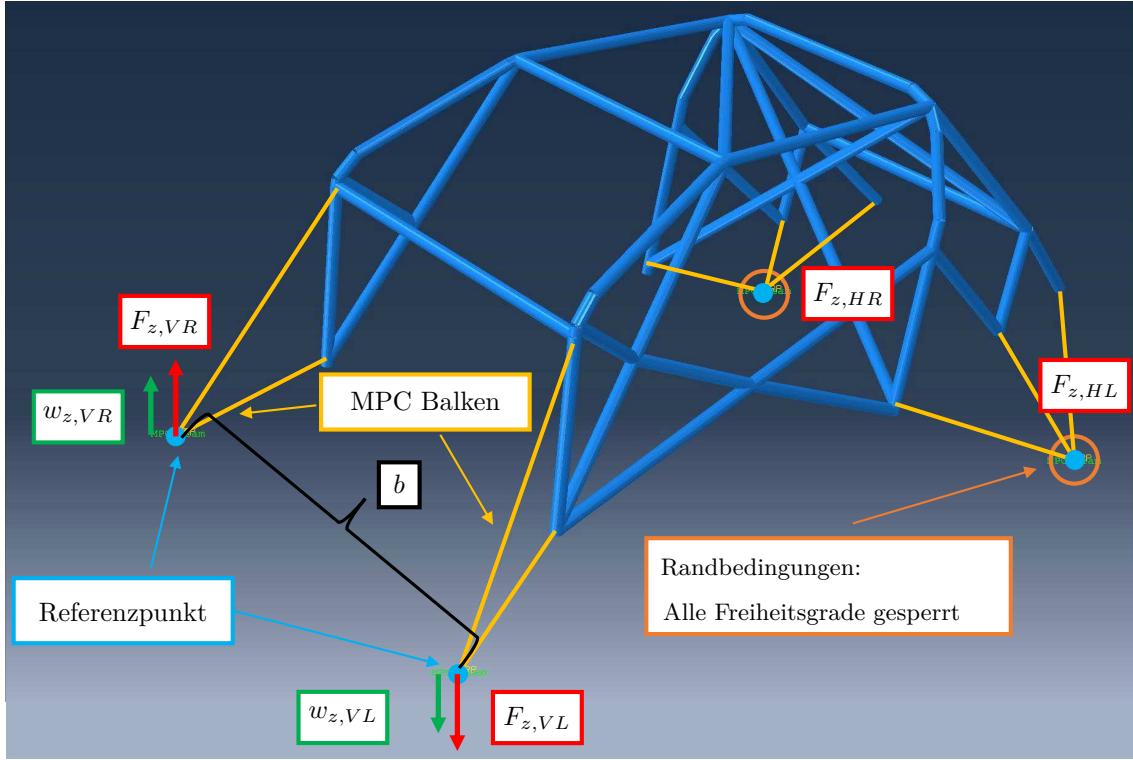


Abbildung 6.9: Modellaufbau - Torsionslastfall

Zur Modellierung des Torsionslastfalls werden Referenz-Punkte an den Radaufstandspunkten erstellt und diese über Multi-Point-Constraints (MPC)¹ mit dem Überrollkäfig verbunden. Die Krafteinleitung erfolgt an den vorderen Radaufstandspunkten, währenddessen die hinteren Radaufstandspunkte fixiert sind.

Die Berechnung der Torsionssteifigkeit c erfolgt über die Gleichung:

$$c = \frac{(F_{z,VL} - F_{z,VR}) \cdot b}{\arctan \frac{w_{z,VL} - w_{z,VR}}{b}}, \quad (6.1)$$

mit

- dem Abstand der Radaufstandspunkte b in y -Richtung,
- den aufgebrachten Lasten vorne links $F_{z,VL}$ und vorne rechts $F_{z,VR}$,
- den resultierenden Verschiebungen vorne links $w_{z,VL}$ und vorne rechts $w_{z,VR}$.

¹Der Begriff Multi-Point-Constraints beschreibt die Verbindung mehrerer Knoten. Es werden ein oder mehrere Knoten definiert (Slave-Knoten), die der Bewegung eines Knotens (Master-Knoten) folgen. Diese Kopplung kann beispielsweise über eine starre Verbindung oder über Balkenelemente erfolgen. Ebenso können nur ausgewählte Freiheitsgrade wie z. B. Translationen gekoppelt sein.

6.4.1 Vergleich Verstrebung Tür Beifahrerseite

Im ersten Vergleich soll der Einfluss der Türverstrebungen untersucht werden. Als Türverstrebungen oder Türkreuze werden die Verstrebungen bezeichnet, die sich in den in Abbildung 6.10 gekennzeichneten Bereichen befinden.

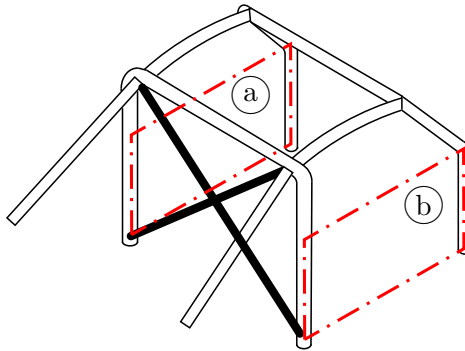


Abbildung 6.10: Untersuchung des Einflusses der Türstreben; a) Bereich der Verstrebung - Tür Fahrerseite; b) Bereich der Verstrebung - Tür Beifahrerseite

In Abbildung 6.11 sind die Türverstrebungen der beiden zu untersuchenden Topologien 1 und 2 schematisch dargestellt. Alle weiteren identischen Verstrebungen, die über den Grundkäfig hinausgehen, sind der Übersichtlichkeit halber nicht dargestellt.

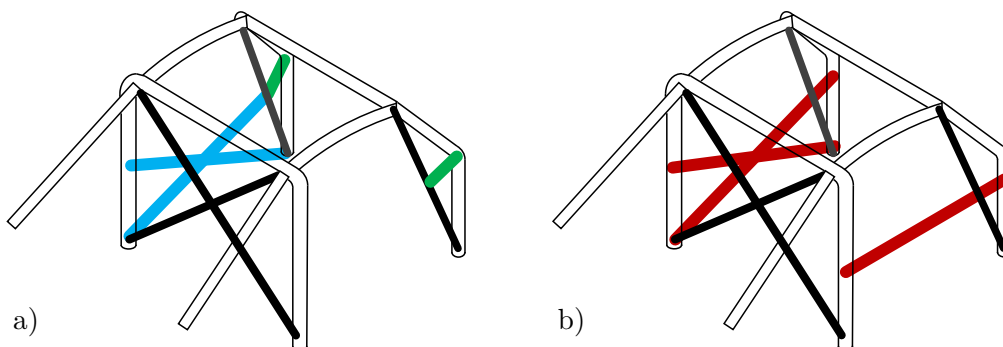


Abbildung 6.11: Schematische Darstellung der Tür-Verstrebungen; a) Topologie 1 - Türkreuz auf Fahrerseite; keine Verstrebung auf Beifahrerseite; b) Topologie 2 - Türkreuz auf Fahrerseite; Querstrebe auf Beifahrerseite

Die beiden Topologien unterscheiden sich in folgenden Punkten:

Topologie 1

- Kreuz Fahrerseite (blau) an Zusatzstrebe A-Säule geteilt (grün)
- Kreuz Beifahrerseite nur Teilstück nach Zusatzstrebe A-Säule (grün)

Topologie 2

- Kreuz Fahrerseite (rot)
- Kreuz Beifahrerseite durch eine Querstrebe ersetzt (rot)

6. Automatisierte Simulation von Balkentragwerken und Implementierung von Knotensteifigkeiten

Die Abbildung 6.12 zeigt die Balkenmodelle zur Berechnung in ABAQUS. Diese sind jeweils im Vergleich zur Referenztopologie 0 dargestellt.

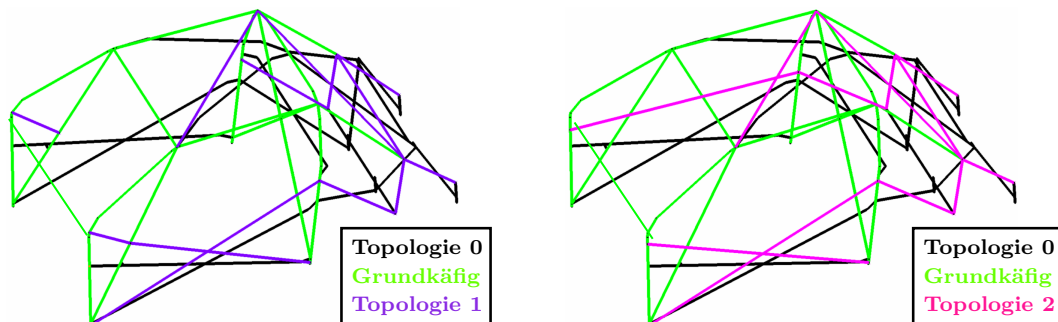


Abbildung 6.12: Vergleich der simulierten Balkenmodelle; Grundkäfing identisch in allen Varianten; links - Unterschiede zwischen Topologie 0 und Topologie 1; rechts - Unterschiede zwischen Topologie 0 und Topologie 2

Tabelle 6.1: Ergebnisse des Vergleichs der Verstrebung Tür Beifahrerseite

Lastfall	A-Säule	B-Säule	Torsion	Gewicht
Reglement	50 mm	100 mm	-	-
Topologie 0	6,87 mm	4,45 mm	6926 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	60,6 kg
Topologie 1	3,78 mm	8,70 mm	790 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	48,6 kg
Topologie 2	3,79 mm	8,59 mm	3259 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	50,4 kg

Die Tabelle 6.1 zeigt die Ergebnisse der Simulation. Die Werte entsprechen den in Abbildung 6.8 eingezeichneten Verschiebungen in negativer z -Richtung an den jeweiligen Kraftangriffspunkten. Der Wert der Torsionssteifigkeit bezieht sich auf die Verdrehung der vorderen Randaufstandspunkte gegenüber den hinteren Radaufstandspunkten.

In Abbildung 6.13 ist die Amplitude der Verschiebungen für die Referenztopologie 0 und Topologie 1 dargestellt.

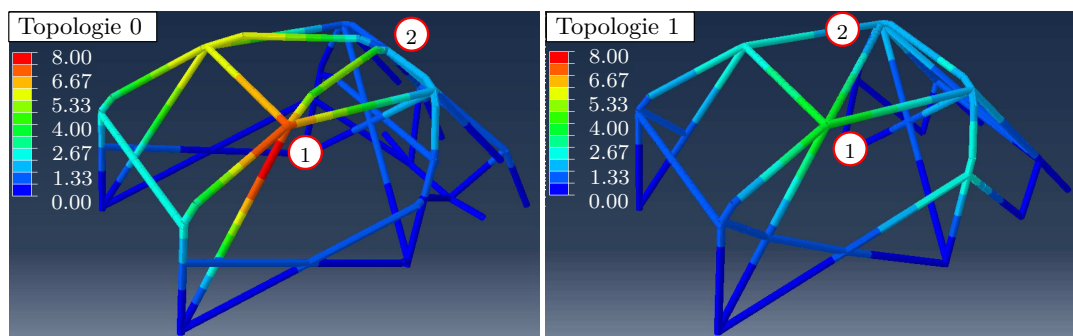


Abbildung 6.13: Amplitude der Verschiebungen bei Belastung von Knoten 1 (A-Säule); Links: Referenz-Überrollkäfing; Rechts: Variante Dachstrebe in der Ebene

6. Automatisierte Simulation von Balkentragwerken und Implementierung von Knotensteifigkeiten

Die Verbesserung der maximalen Durchsenkung von 6,87 mm auf 3,78 mm / 3,79 mm im Lastfall „A-Säule“ ist auf eine geänderte Strebe im Dachbereich zurückzuführen. Auf den mit ① markierten Knoten wird entsprechend der Prüfvorschrift die Kraft eingeleitet. Am Punkt ② trifft die Dachstrebe auf den Hauptbügel der B-Säule. Zur besseren Veranschaulichung der Wirkungsweise der Dachstreben sind in Abbildung 6.14 für beide Varianten die resultierenden Verschiebungen ausgehend vom Punkt ② dargestellt.

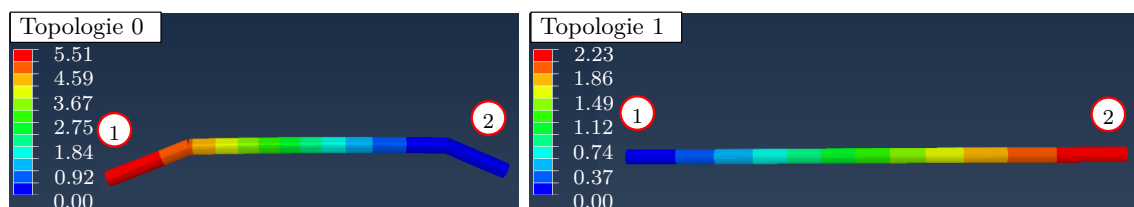


Abbildung 6.14: Verschiebungen der Dachstrebe bei Belastung des Knoten 1 (A-Säule); Links: Referenz-Überrollkäfig; Rechts: Variante Dachstrebe in der Ebene

Die Dachstrebe der Referenzgeometrie weist eine gekrümmte Form auf, wodurch diese bei Belastung aufgespreizt bzw. gestaucht wird. Es wird zur Auswertung ein lokales Koordinatensystem im Punkt ② definiert, sodass die Verschiebungen dort 0 mm betragen. Die Verschiebung des Punktes ① beträgt 5,51 mm, im Gegensatz zur geraden Dachstrebe der Topologie 1/2, bei welcher sich der Punkt ① nur um 2,23 mm verschiebt.

Die Verschiebungen im Punkt ② sind im globalen Koordinatensystem mit 1,36 mm zu 1,55 mm näherungsweise gleich groß. Die höhere Verformung an dem für die Zertifizierung relevanten Punkt ① lässt sich somit durch die Dachstrebe erklären, welche sich bei gleicher Last durch die Krümmung stärker verformt.

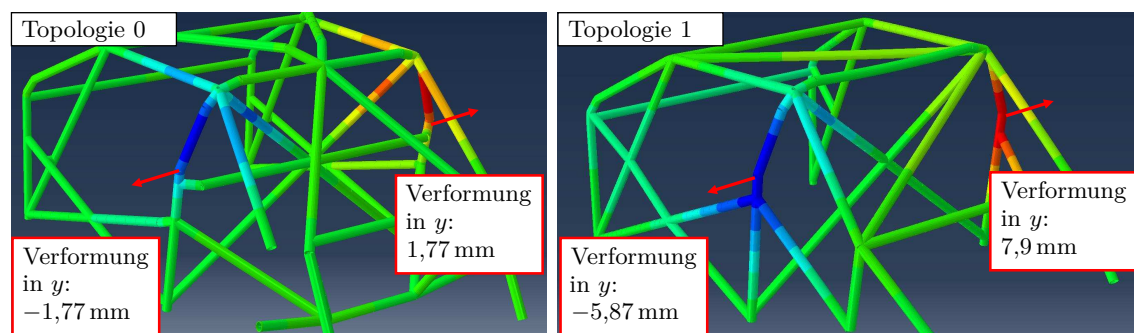


Abbildung 6.15: Spreizung des Hauptbügels bei Belastung durch vertikale Last; Links: Referenz-Überrollkäfig; Rechts: Variante ohne Gurtstrebe

Die gemittelte Durchsenkung der beiden Krafteinleitungspunkte zeigt beim Lastfall „B-Säule“ eine Verschlechterung von 4,45 mm auf 8,70 mm / 8,59 mm auf. Dies ist auf eine fehlende Strebe, welche die B-Säule verbindet, zurückzuführen, wodurch der Hauptbügel bei Belastung weiter gespreizt wird (siehe Abb. 6.15).

Die maximalen Durchsenkungen für die Zertifizierungsversuche werden sowohl für die Referenzgeometrie als auch für die zu untersuchenden Varianten eingehalten. Der Einfluss der geänderten Verstreibungen in Topologie 1 und 2 ist zu vernachlässigen. Die Spannungen sind jedoch noch im Detail mittels einer FE-Simulation auszuwerten.

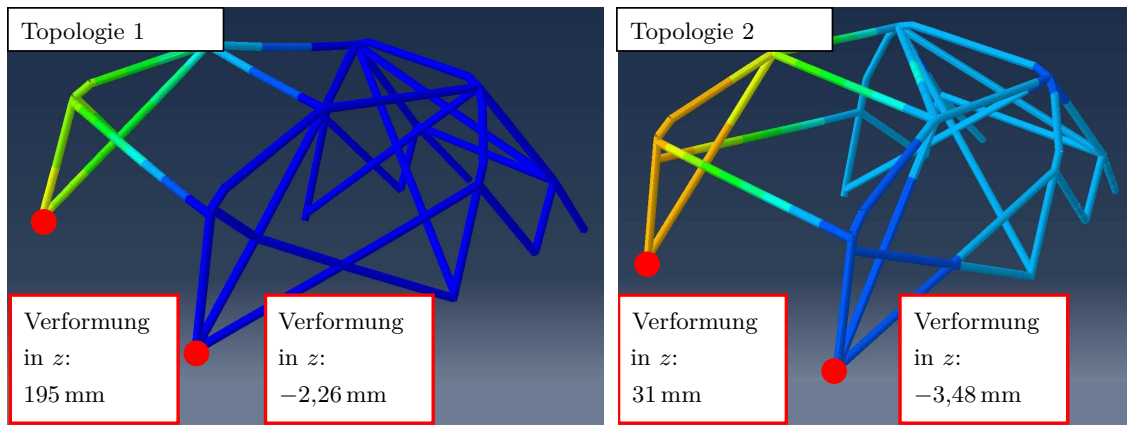


Abbildung 6.16: Vergleich der Verschiebungsfelder in z-Richtung beim Torsionssteifigkeitsversuch für Topologie 1 und 2

In Abbildung 6.16 sind die Topologien 1 und 2 unter Torsionsbelastung dargestellt. Hierbei ist die Torsionssteifigkeit der Variante 1 ohne Türstrebe vernachlässigbar. Die Torsionssteifigkeit der Variante 2 mit horizontaler Strebe fällt ebenfalls deutlich ab.

6.4.2 Vergleich Verstrebung Dach und Stütze C-Säule

Im zweiten Vergleich sollen unterschiedliche Varianten der Dach-Verstrebung sowie der Verstrebung der Stütze C-Säule betrachtet werden (siehe Abb. 6.17).

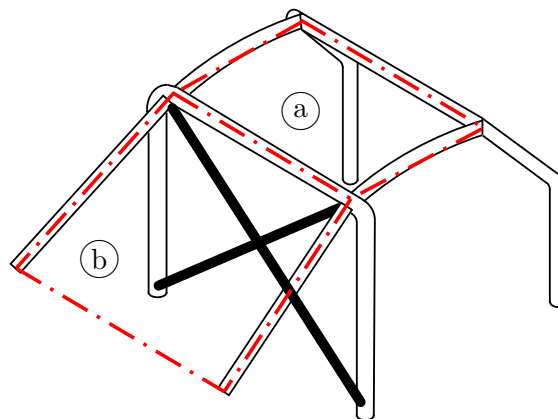


Abbildung 6.17: Untersuchung des Einflusses der Dach-Verstrebung sowie der Verstrebung der Stütze C-Säule; a) Bereich der Dach-Verstrebung; b) Bereich der Verstrebung der Stütze C-Säule

In Abbildung 6.18 sind die Verstrebung der beiden zu untersuchenden Topologien 3 und 4 schematisch dargestellt. Alle weiteren identischen Verstrebungen, die über den Grundkäfig hinausgehen, sind der Übersichtlichkeit halber nicht dargestellt.

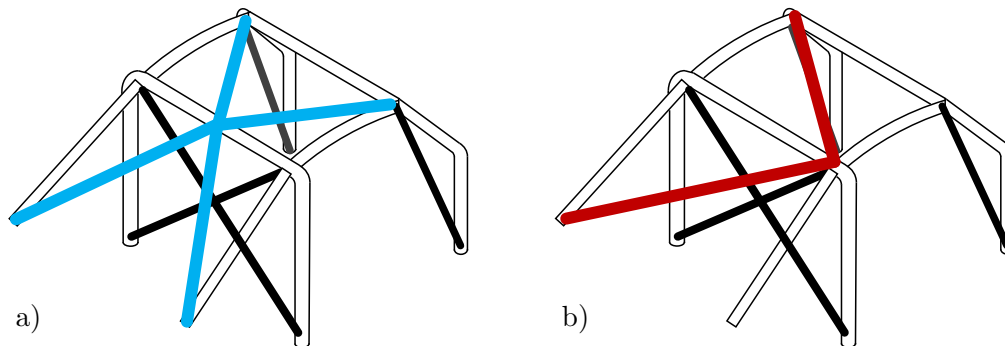


Abbildung 6.18: Schematische Darstellung der Dach-Verstrebung sowie der Verstrebung der Stütze C-Säule; a) Topologie 3 - V-Verstrebung im Dach-Bereich; V-Strebe in der Stütze C-Säule; b) Topologie 4 - Diagonalverstrebung im Dach-Bereich; Diagonalstrebe in der Stütze C-Säule

Die beiden Topologien unterscheiden sich in folgenden Punkten:

Topologie 3

- V-Strebe im Dach-Bereich
- V-Strebe in der Stütze C-Säule

Topologie 4

- Diagonalverstrebung im Dach-Bereich
- Diagonalstrebe in der Stütze C-Säule

Die Abbildung 6.19 zeigt die Balkenmodelle zur Berechnung in ABAQUS. Diese sind jeweils im Vergleich zur Referenztopologie 0 dargestellt.

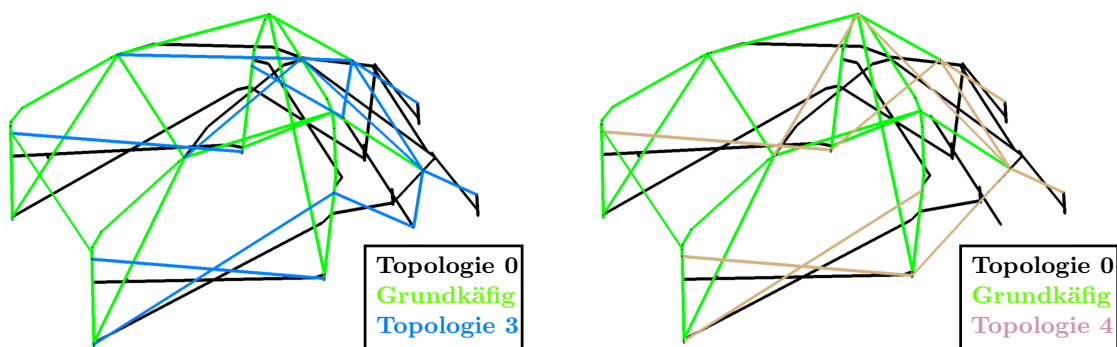


Abbildung 6.19: Vergleich der simulierten Balkenmodelle; Grundkäfig identisch in allen Varianten; links - Unterschiede zwischen Topologie 0 und Topologie 3; rechts - Unterschiede zwischen Topologie 0 und Topologie 4

In Tabelle 6.2 sind die Ergebnisse der Simulationen aufgeführt. Ebenso wie bei den Varianten in Abschnitt 6.4.1 verbessert sich die maximale Durchsenkung im Kraftangriffspunkt beim Lastfall „A-Säule“ von 6,9 mm auf ca. 3,5 mm bei beiden Varianten, der Unterschied zwischen den Varianten ist jedoch zu vernachlässigen.

Tabelle 6.2: Ergebnisse des Vergleichs der Verstrebung Dach und der Stütze C-Säule

Lastfall	A-Säule	B-Säule	Torsion	Gewicht
Reglement	50 mm	100 mm	-	-
Topologie 0	6,87 mm	4,45 mm	6926 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	60,6 kg
Topologie 3	3,52 mm	6,2 mm	5818 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	52,7 kg
Topologie 4	3,44 mm	8,85 mm	5600 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	49,8 kg

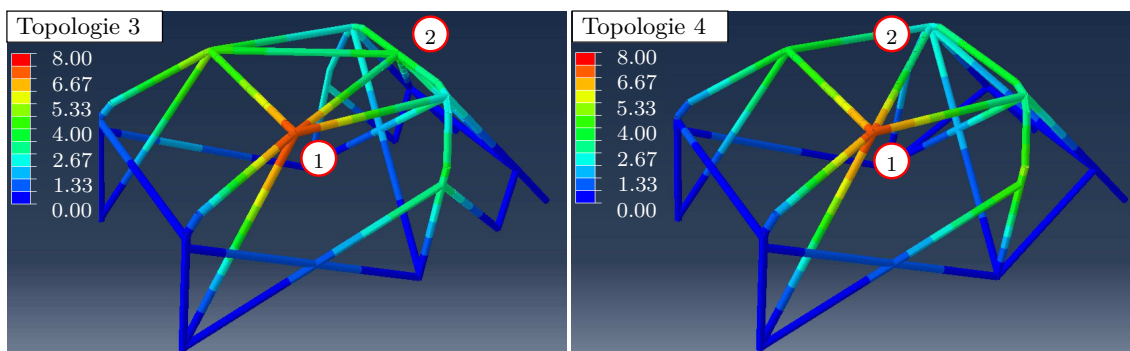


Abbildung 6.20: Verschiebungsverlauf bei Belastung des Knoten 1 (A-Säule); Links: Topologie 3; Rechts: Topologie 4

Die dargestellten Verschiebungsverläufe in Abbildung 6.20 sind bei beiden Varianten näherungsweise identisch. Die gemittelte Durchsenkung der Kraftangriffspunkte des Referenzkäfigs beim Lastfall "B-Säule" steigt von 4,45 mm auf 6,2 mm bei Topologie 3, bzw. 8,85 mm bei Topologie 4. Die Verschlechterung ist, wie schon in Abschnitt 6.4.1 beschrieben, auf die fehlende Gurtstrebe, welche beide Seiten verbindet, zurückzuführen. Die Verbesserung bei Topologie 3 gegenüber den anderen untersuchten Topologien ist durch eine zusätzliche Abstützung durch die in Abbildung 6.21 rot markierten Streben 1 und 2 bedingt.

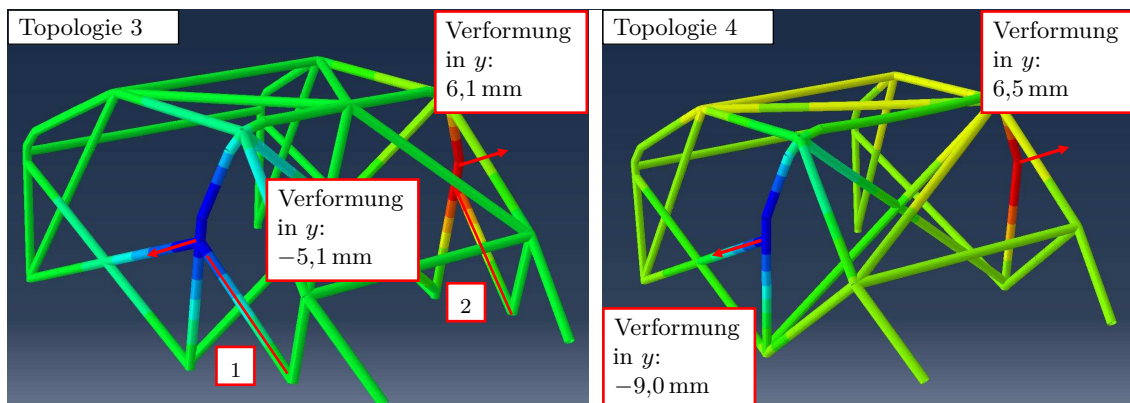


Abbildung 6.21: Spreizung des Hauptbügels bei Belastung durch vertikale Last; Links: Topologie 3 mit zusätzlicher Abstützung; Rechts: Topologie 4

6. Automatisierte Simulation von Balkentragwerken und Implementierung von Knotensteifigkeiten

In Abbildung 6.22 sind die Verschiebungsverläufe in z -Richtung für die zu untersuchende Variante dargestellt.

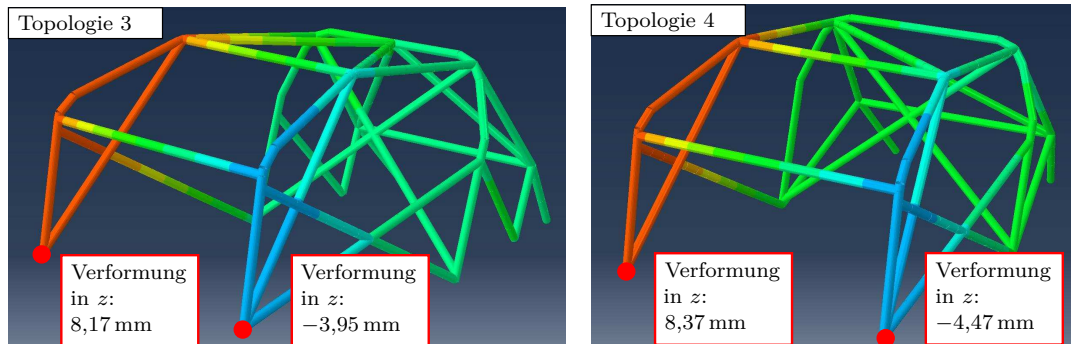


Abbildung 6.22: Vergleich der Verschiebungsfelder in z -Richtung beim Torsionssteifigkeitsversuch für Topologie 3 und 4

Die minimal bessere Torsionssteifigkeit der Variante 3 geht von der V-Strebung am Dach aus, welche den Knoten „A-Säule“ als zusätzliche Steifigkeit besser an den Hauptbügel anbindet als die Diagonalstrebe. Dies wird durch die betragsmäßig minimal kleineren Verschiebungen an den rot markierten vorderen Aufnahme- und Abnahmepunkten ersichtlich.

6.4.3 Auswahl Geometrie

In Tabelle 6.3 sind die Ergebnisse der Fallstudie dargestellt. Da alle Varianten die statischen Tests erfüllen, bleibt als Auswahlkriterium das Verhältnis Gewicht zu Torsionssteifigkeit, welches als Kenngröße eingeführt wird. Das eingeführte Steifigkeits-/Gewichtsverhältnis ist ähnlich zu der in der Literatur zu findenden Leichtbaugüte, welche sich dadurch unterscheidet, dass diese auf die Standfläche des Fahrzeuges bezogen wird [86].

Tabelle 6.3: Übersicht der Verformungen, Torsionssteifigkeiten und Gewicht der untersuchten Topologien

Lastfall	A-Säule	B-Säule	Torsion	Gewicht	Steifigkeit/Gewicht
Reglement	50 mm	100 mm	-	-	-
Topologie 0	6,87 mm	4,45 mm	6926 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	60,6 kg	114
Topologie 1	3,78 mm	8,70 mm	790 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	48,6 kg	16
Topologie 2	3,79 mm	8,59 mm	3259 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	50,4 kg	65
Topologie 3	3,52 mm	6,2 mm	5818 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	52,7 kg	110
Topologie 4	3,44 mm	8,85 mm	5600 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	49,8 kg	112

Zusätzliches Gewicht im Fahrzeug ist meist unerwünscht, jedoch bedeutet ein hohes Steifigkeits-/Gewichtsverhältnis, dass dieses Zusatzgewicht in eine möglichst hohe zusätz-

liche Versteifung der Karosserie umgesetzt wird. Hierbei sind die Varianten 0, 3 und 4 in etwa gleich. Wie eingangs erwähnt, muss die Abwägung „Verbesserung der Steifigkeit“ oder „Gewichtersparnis“ in Abhängigkeit des Fahrzeuges/der Rennserie getroffen werden. Im vorliegenden Fall handelt es sich um einen Kleinwagen, der in der Serie bereits eine höhere Steifigkeit als größere Wagen aufweist. Das Optimum wird somit bei Topologie 4 liegen, da diese mit 49,8 kg das zweit geringste Gewicht der untersuchten Topologien aufweist und durch das hohe Steifigkeits/Gewichtsverhältnis dennoch eine Versteifung von $5600 \frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$ bietet. Das Gewicht der Topologie 1 ist mit 48,6 kg zwar 1,2 kg leichter als Topologie 4, bietet jedoch mit $790 \frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$ eine deutlich geringere Versteifungswirkung.

6.4.4 Weiterführung

Es wurde die Anwendung einer Fallstudie mit Hilfe des Simulations-Skriptes zur Erstellung der Balkenmodelle demonstriert. Dabei wurden verschiedene Varianten erstellt, indem ausgehend, von einem Basis-Überrollkäfig, weitere Verstrebungen hinzugefügt wurden. Die Auswertung erfolgte mit einem modifizierten A-B-Vergleich. Hierfür wurden zwei neue Varianten, die sich hauptsächlich in dem zu untersuchenden Konstruktionsmerkmal unterscheiden, miteinander verglichen und diese wiederum mit dem Vorgänger-Referenzmodell. Die Beurteilung erfolgte neben den Zahlenwerten durch Sichtung der Verschiebungsfelder und Interpretation der Funktionsweise einzelner Streben. Diese Vorgehensweise ist exemplarisch für eine Dachstrebe in Abschnitt 6.4.1 dargestellt.

Während die Simulationszeiten, insbesondere der Modellaufbau, auf ein Minimum verkürzt worden sind, ist die Interpretation der Wirkungsweise weiterhin arbeitsintensiv, welche jedoch nur nötig ist, wenn beispielsweise weitere Varianten abgeleitet werden sollen. Hierfür bieten sich zwei Lösungsansätze:

- Logik zur Auswahl der Verstrebungen im Simulationsskript
Im beschriebenen Fall wurden die Topologie-Varianten händisch mit Hilfe des DMSB-Handbuches erstellt. Dabei erfolgt jedoch zwangsläufig eine Vorauswahl der Strukturen im Konstruktionsprozess. Durch Implementierung einer Funktion zur Erstellung der Geometrie im Python-Skript und die Vorgabe der Basisstruktur, sowie möglicher Verstrebungen statt der Vorgabe der kompletten Geometrie, könnte der Algorithmus hingehend auf einen selbstständigen A-B-Vergleich erweitert werden. In einem Referenzkäfig würden hierbei einzelne Streben entfernt bzw. versetzt oder andere Verbindungspunkte gewählt werden. Nach der Berechnung und automatischen Auswertung der Verschiebungen oder Steifigkeiten würde je nach Ergebnis die zu untersuchende Strebe nochmals variiert oder als befriedigende Lösung akzeptiert und die Vorgehensweise auf die nächste zu untersuchende Stelle angewandt werden.
- Skript-gesteuerte Generierung von „allen“ Topologie-Varianten
Alternativ zum skript-gesteuerten A-B-Vergleich mit selbstständiger Entscheidung im Simulationsskript könnte aufgrund der geringen Rechenzeit auch eine Brute-Force-Methode zur Anwendung kommen. Hierfür würde ausgehend von der Basisstruktur jede mögliche Verstrebungsvariante erstellt werden, welche nicht gegen vorgegebene Randbedingungen verstößt. Nach einer automatisierten Berechnung und Auswertung können die Varianten mit dem gewünschten Steifigkeitsverhältnis/Gewicht ohne weitere Iteration direkt ausgewählt werden. Neben der Topologie sind auch die Positionen einzelner Knotenpunkte oder die Rohrdurchmesser/Wandstärken mögliche Parameter für die Untersuchung.

6.5 Implementierung zusätzlicher Knotensteifigkeit

Für die Fallstudien im Abschnitt 6.4 werden Strukturen aus Balkenelementen verwendet, die im jeweiligen „Knoten“ verbunden sind. Im Vergleich hierzu zeigt die Abbildung 6.23 einen Teil eines Überrollkäfts aus dem Fahrzeug Porsche 911 GT3, bei dem die Verbindungen der Rohre an den Knotenpunkten zusätzlich durch eingearbeitete Bleche verstärkt sind. Weiterhin ist das Konzept einer Klebeverbindung für eine Kreuzverstrebung dargestellt. Die abgebildeten Verstärkungen der Verbindungspunkte erstrecken sich teilweise über die halbe Balkenlänge. Diese Zunahme der Steifigkeit soll im Folgenden in der Simulation abgebildet und die Auswirkungen untersucht werden.



Abbildung 6.23: Verstärkungen der Knoten; links - Bügel aus Porsche 911 GT3 versteift mit Knotenblech; rechts - Konzept für Dachstreben mit Klebeschalen

6.5.1 Programmtechnische Umsetzung

Zunächst soll die Erstellung von Gelenkverbindern in ABAQUS in Anlehnung an [23] betrachtet werden. ABAQUS bietet die Möglichkeit aus einer Reihe von Basis-Konnektor-Elementen einen benutzerdefinierten Konnektor zu erstellen. Aus den Basis-Konnektor-Elementen „Join“ und „Rotation“ wird ein Gelenkverbinder definiert. Die Wirkungsweise der Basis-Konnektor-Elemente ist in Abbildung 6.24 schematisch dargestellt. Das Äquivalent in der Technik zu dieser Modellbildung ist ein Kugelgelenk.

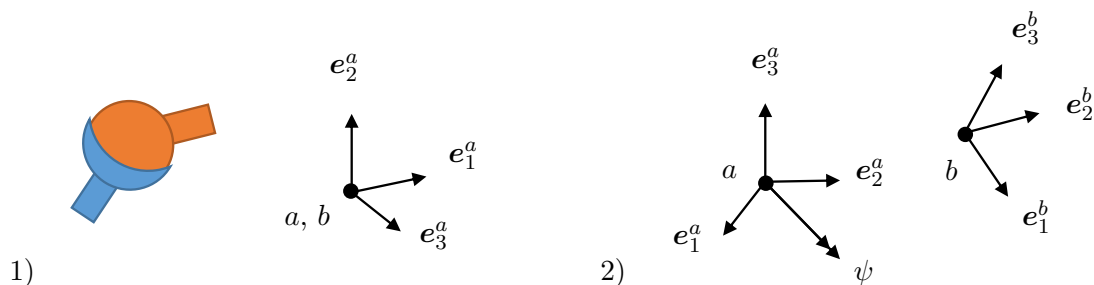


Abbildung 6.24: Basis-Konnektor-Elemente; 1) Join - Translatorische Verknüpfung der Knoten a und b; 2) Rotate - Drehfreiheitsgrad zwischen Knoten a und b; mit Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 (vgl. [23])

Die Konnektorkomponente „Join“ verknüpft die Positionen der Knoten miteinander (siehe Abb. 6.24). Es gilt:

$$u_{a,1} = u_{b,1}, \quad u_{a,2} = u_{b,2}, \quad u_{a,3} = u_{b,3} \quad .$$

Wenn beide Knoten am Beginn der Simulation aufeinander liegen, bewegen sich diese wie ein einzelner Knoten. Liegen beide Knoten nicht aufeinander, so werden die relativen Koordinaten vom Knoten b zum Knoten a fixiert.

Die Komponente „Rotation“ fügt die Drehfreiheitsgrade ur_1 , ur_2 , ur_3 zwischen beiden Knoten hinzu (siehe Abb. 6.24). Es gilt:

$$\mathbf{e}_i^b = e^{\hat{\boldsymbol{\psi}}} \cdot \mathbf{e}_i^a$$

mit $i = 1, 2, 3$. Der Vektor $\boldsymbol{\psi}$ wird als axialer Vektor der schiefsymmetrischen Matrix $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ bezeichnet. Es gilt:

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & 0 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Werden beide Konnektorkomponenten verknüpft, so erlaubt die Komponente „Rotation“ eine Verschiebung des Knotens b im globalen Koordinatensystem. Dies ist möglich, weil sich das lokale Koordinatensystem am Knoten a mitdreht und somit die relativen Koordinaten am Knoten b identisch bleiben, obwohl dieser sich in globalen Koordinaten ausgedrückt bewegt.

Die Kombination aus „Join“ und „Rotation“ bietet bereits die geforderten Freiheitsgrade, jedoch ist noch eine Verdrehung ohne Widerstand möglich. Über die Option „Connector elastic behavior“ wird die Gelenksteifigkeit hinzugefügt. Für linear unabhängiges, elastisches Verhalten des Gelenkverbinders werden die Federsteifigkeiten D_{11} , D_{22} und D_{33} definiert. Es gilt:

$$M_1 = D_{11} \cdot ur_1,$$

$$M_2 = D_{22} \cdot ur_2,$$

$$M_3 = D_{33} \cdot ur_3,$$

mit den Momenten M_1 , M_2 und M_3 sowie den Rotationen ur_1 , ur_2 und ur_3 .

In dem in Abbildung 6.25 dargestellten, einseitig eingespannten Balken, soll der Gelenkverbinder zur Anwendung kommen.

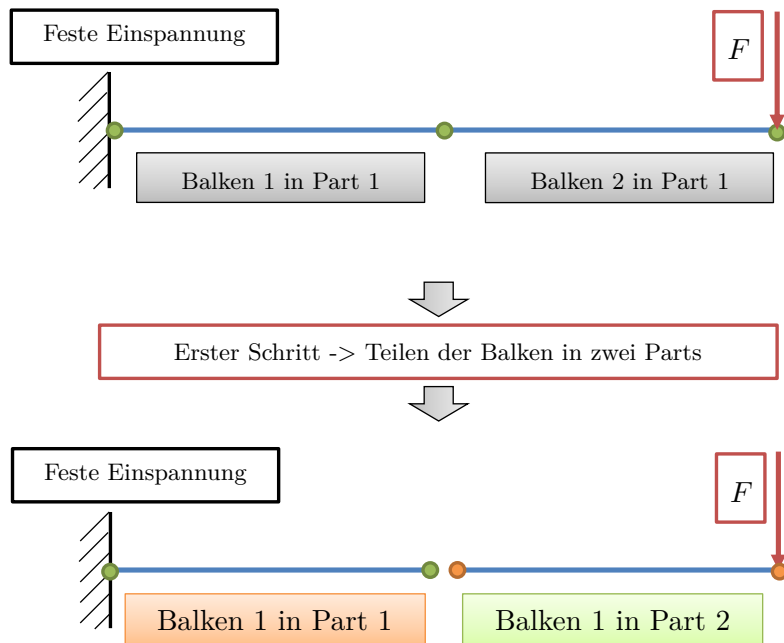


Abbildung 6.25: Aufteilung von Balkenelementen zur Verknüpfung mit einem Gelenk

Das Ausgangssimulationsmodell besteht aus einem Bauteil, welches zwei Einzelbalken enthält. Bei der Erstellung der Geometrie durch das Python-Skript, wird das Bauteil „Part 1“ erstellt und beide Balken diesem Bauteil hinzugefügt. Das Bauteil verhält sich in der Simulation somit wie ein durchgehender Balken.

Diese beiden Balken sollen nun durch das vorher betrachtete Gelenk verbunden werden. Hierzu wird die Modellerstellung so geändert, dass für jeden Balken ein Bauteil erstellt wird. Dies ist notwendig, da ansonsten alle Balken in einem gemeinsamen Bauteil („Part“) an den Knoten ideal steif verbunden sind. Es werden somit zwei Bauteile („Part 1“ und „Part 2“) erstellt und diesen jeweils ein Balken („Beam 1“) hinzugefügt.

In Abbildung 6.26 sind die Biegelinien für unterschiedliche Gelenksteifigkeiten dargestellt.

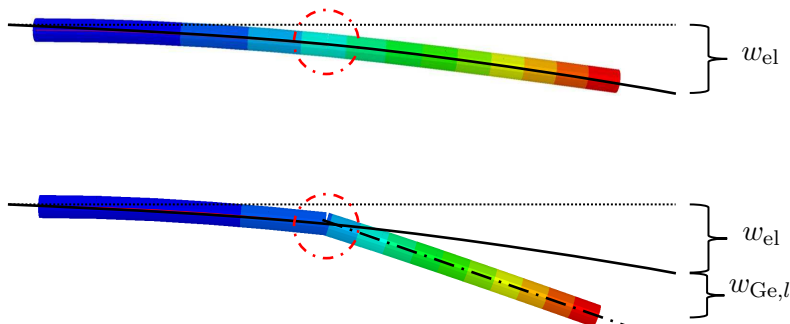


Abbildung 6.26: Biegelinie des einseitig eingespannten Balkens; oben - Verbindung über Gelenk mit Steifigkeit \gg Biegesteifigkeitsäquivalent; unten - Verbindung über Gelenk mit Steifigkeit $<$ Biegesteifigkeitsäquivalent

Für eine zweckmäßige Darstellung der Wirkungsweise der Gelenkverbinder, werden für die Drehsteifigkeiten des Gelenkes keine Zahlenwerte angegeben, sondern auf die Steifigkeit des Balkens referenziert. Wenn somit angegeben wird, dass die Gelenksteifigkeit dem

Balkensteifigkeitsäquivalent entspreche, bedeutet dies, dass die Drehsteifigkeit des Gelenkes so gewählt wird, dass das Resultat (etwa die Verschiebung am Balkenende) dem des Balkens ohne Gelenkverbinders entspricht.

Im ersten Fall wird die Steifigkeit des Gelenks höher als das Steifigkeitsäquivalent des Balkens gewählt. Das Gelenk verhält sich wie eine feste Verbindung und die Durchsenkung am Ende des Balkens beträgt w_{el} . Im zweiten Fall wird die Steifigkeit niedriger als das Balkensteifigkeitsäquivalent gewählt. Daraus folgt eine unstetige Biegelinie und die Gesamtdurchsenkung setzt sich aus der elastischen Durchsenkung des Balkens w_{el} und der Durchsenkung $w_{Ge,l}$ bedingt durch die Drehsteifigkeit des Gelenks zusammen.

Das Beispiel zeigt, dass mit einer einfachen Verbindung durch ein Gelenk nur eine verringerte Knotensteifigkeit realisiert werden kann, da beide Balken ohne Gelenk ohnehin ideal steif verbunden wären (siehe Abb. 6.25).

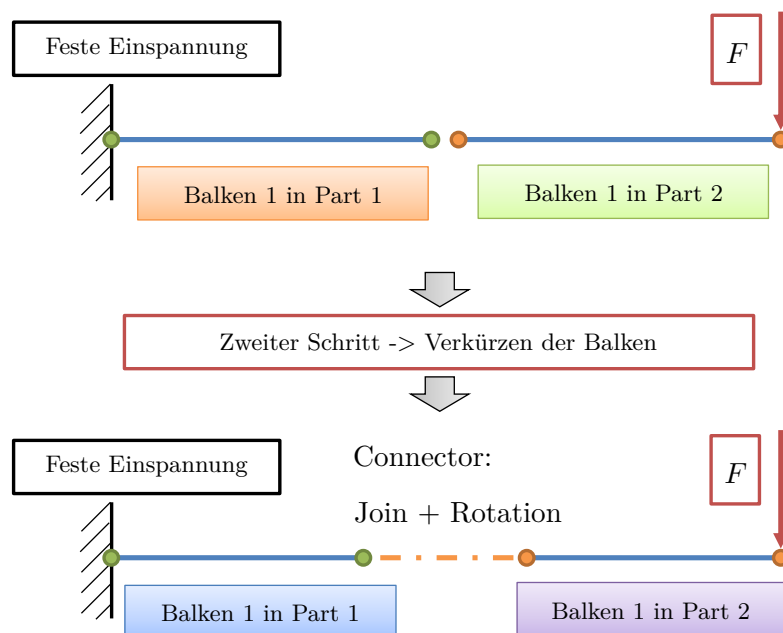


Abbildung 6.27: Verkürzung der geteilten Balkenelemente um die Länge einer fiktiven Knotenversteifung und Verbindung mit einem Gelenk

Um eine höhere Knotensteifigkeit zu simulieren, welche z. B. durch Anbringung von Verstärkungselementen entsteht, wird in einem Abschnitt des Balkens die Steifigkeit erhöht. Dies erfolgt durch die Ersetzung des Abschnittes durch ein Gelenk mit einer höheren resultierenden Steifigkeit. Hierfür werden im Berechnungsmodell die Balken in „Part 1“ und „Part 2“ verkürzt und mit dem Gelenk verbunden (siehe Abb. 6.27).

In Abbildung 6.28 sind die Biegelinien für drei unterschiedliche Knotensteifigkeiten dargestellt.

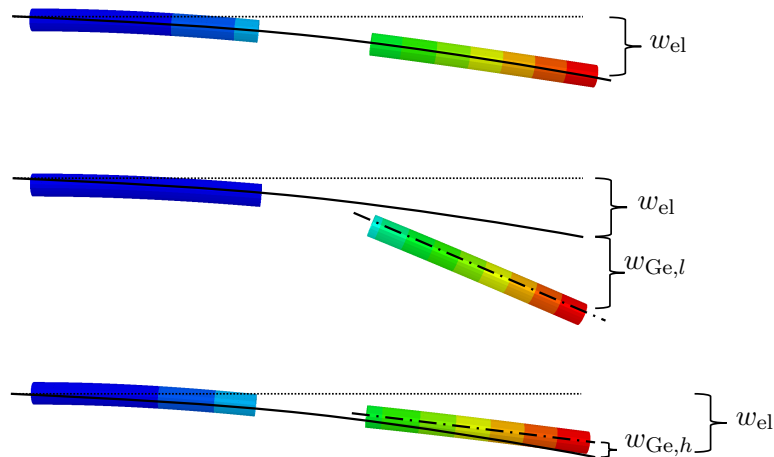


Abbildung 6.28: Biegelinie des einseitig eingespannten Balkens; oben - Verbindung über Gelenk mit Steifigkeit $\hat{=}$ Biegesteifigkeitsäquivalent des Balkens; mitte - Verbindung über Gelenk mit Steifigkeit $<$ Biegesteifigkeitsäquivalent des Balkens; unten - Verbindung über Gelenk mit Steifigkeit $>$ Biegesteifigkeitsäquivalent des Balkens

Die Drehsteifigkeit des Gelenks im ersten Fall entspricht dem Steifigkeitsäquivalent des herausgeschnittenen Rohres, sodass die Durchsenkung am Balkenende w_{el} beträgt. Die Durchsenkung des zweiten Falles setzt sich wieder aus der elastischen Durchsenkung w_{el} sowie der zusätzlichen Durchsenkung $w_{Ge,l}$ zusammen. Im dritten Fall ist die Gesamtdurchsenkung um den Wert $w_{Ge,h}$ geringer, als die elastische Durchsenkung w_{el} des unmodifizierten Balkens. Das Gelenk „überbrückt“ somit die Lücke im Balken mit einer höheren Steifigkeit.

Eine direkte Verbindung mittels Gelenk ist nur zwischen zwei Balken möglich. Dies hat bei den untersuchten Tragwerken jedoch keine Relevanz, da durchgängige Rohre nicht unterbrochen werden und Versteifungen vorwiegend an Punkten angebracht werden, an denen mehrere Rohre miteinander verbunden werden.

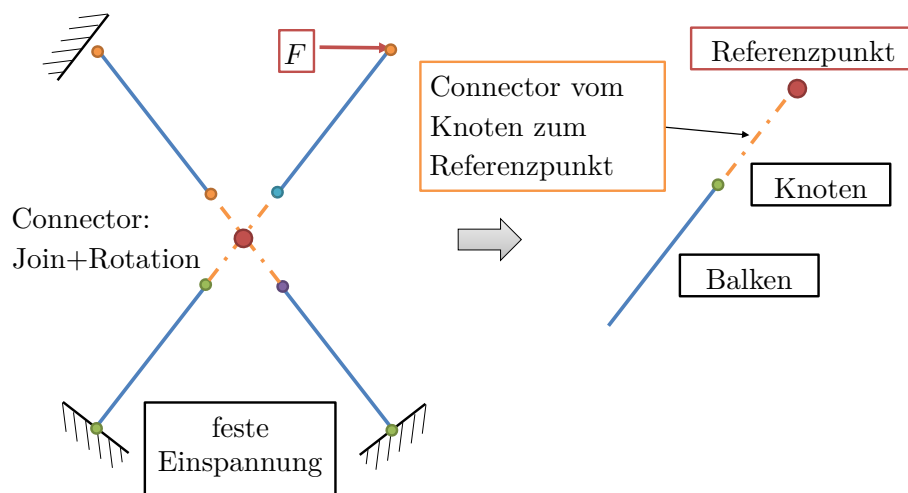


Abbildung 6.29: Kreuz mit Gelenkverbinder; links - Randbedingungen für Simulation; rechts - Verbindung über Referenzpunkt zur Verknüpfung von mehreren Balken in einem Knotenpunkt

Die Abbildung 6.29 zeigt die Vorgehensweise bei Verbindung von drei oder mehreren Balken. Hierbei wird im Knotenpunkt ein Referenzpunkt erstellt und die Gelenkverbindungen erfolgen jeweils vom Balkenende zu diesem Referenzpunkt.

In Tabelle 6.4 sind die horizontalen Verschiebungen des Kraftangriffspunktes für unterschiedliche Varianten dargestellt.

Tabelle 6.4: Verschiebungen am Kraftangriffspunkt in Abhängigkeit der Steifigkeit der Gelenkverbindung

	Variante	Gelenksteifigkeit	Verschiebung
1	Kreuz durchgängig ohne Gelenk	-	12,7 mm
2	Kreuz mit verkürzten Balken und Verbindung über Gelenk	$\hat{=}$ Balkensteifigkeitsäquivalent	12,3 mm
3	Kreuz mit verkürzten Balken und Verbindung über Gelenk	$\hat{=}$ $10 \times$ Balkensteifigkeitsäquivalent	7,3 mm

Die Variante 1 wird als Balkenmodell ohne Modifikation berechnet. Variante 2 wird wie in Abbildung 6.29 dargestellt sowie mit den Knotensteifigkeiten aus Abbildung 6.28 berechnet. Beide Werte zeigen eine gute Übereinstimmung, welche durch Modifikation der Gelenksteifigkeit weiter verbessert werden kann. Bei Variante 3 wird im Bereich der verkürzten Balken eine Verstärkung berücksichtigt. Hierbei wird eine zehnfache Steifigkeit der Verbindung gegenüber durchgehender Rohre angenommen, was die resultierende Verschiebung verringert.

6.5.2 Ermittlung der Knotensteifigkeiten

Die für die Berechnung benötigten Knotensteifigkeiten können durch Simulation oder Versuch bestimmt werden.

Bei der Ermittlung der Werte durch die Simulation wird die Vorgehensweise an der in Abbildung 6.30 schematisch dargestellten Knotenverbindung betrachtet. Das gezeigte Knotenmodell verbindet vier Rohre. An jeder dieser Anschlussstellen treten sechs Schnittgrößen ($F_{i,x}, F_{i,y}, F_{i,z}, M_{i,x}, M_{i,y}, M_{i,z}$) auf. Dadurch ergibt sich für die Knoten-Steifigkeitsmatrix eine 24×24 -Matrix.

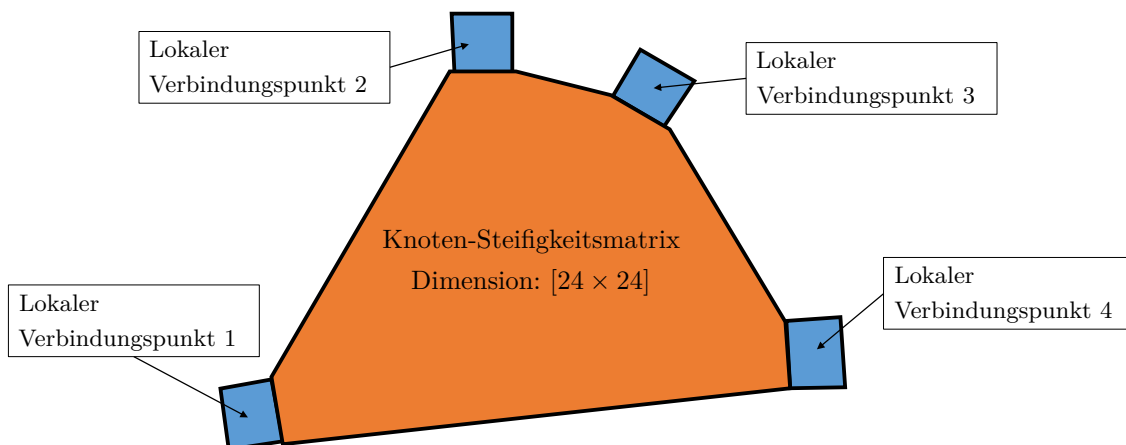


Abbildung 6.30: Vereinfachtes Knotenmodell zur Ermittlung der Knotensteifigkeit

6. Automatisierte Simulation von Balkentragwerken und Implementierung von Knotensteifigkeiten

In Abbildung 6.31 ist die Auswertung der Berechnung für einen Knotenverbinder von zwei Rohren schematisch dargestellt. Das Bauteil wird an den eingezeichneten Verbindungspunkten ① und ② gelagert. Dabei werden zunächst alle Freiheitsgrade an den Verbindungspunkten gesperrt. Im vorliegenden Beispiel gibt es somit 12 Freiheitsgrade. Daraufhin wird ein gesperrter Freiheitsgrad freigeben und eine Kraft oder Verschiebung in Richtung des Freiheitsgrades aufgebracht. Über die Ausgabe der Verformungen und der Lagerkräfte an allen Verbindungsknoten, kann eine Spalte der Steifigkeitsmatrix berechnet werden.

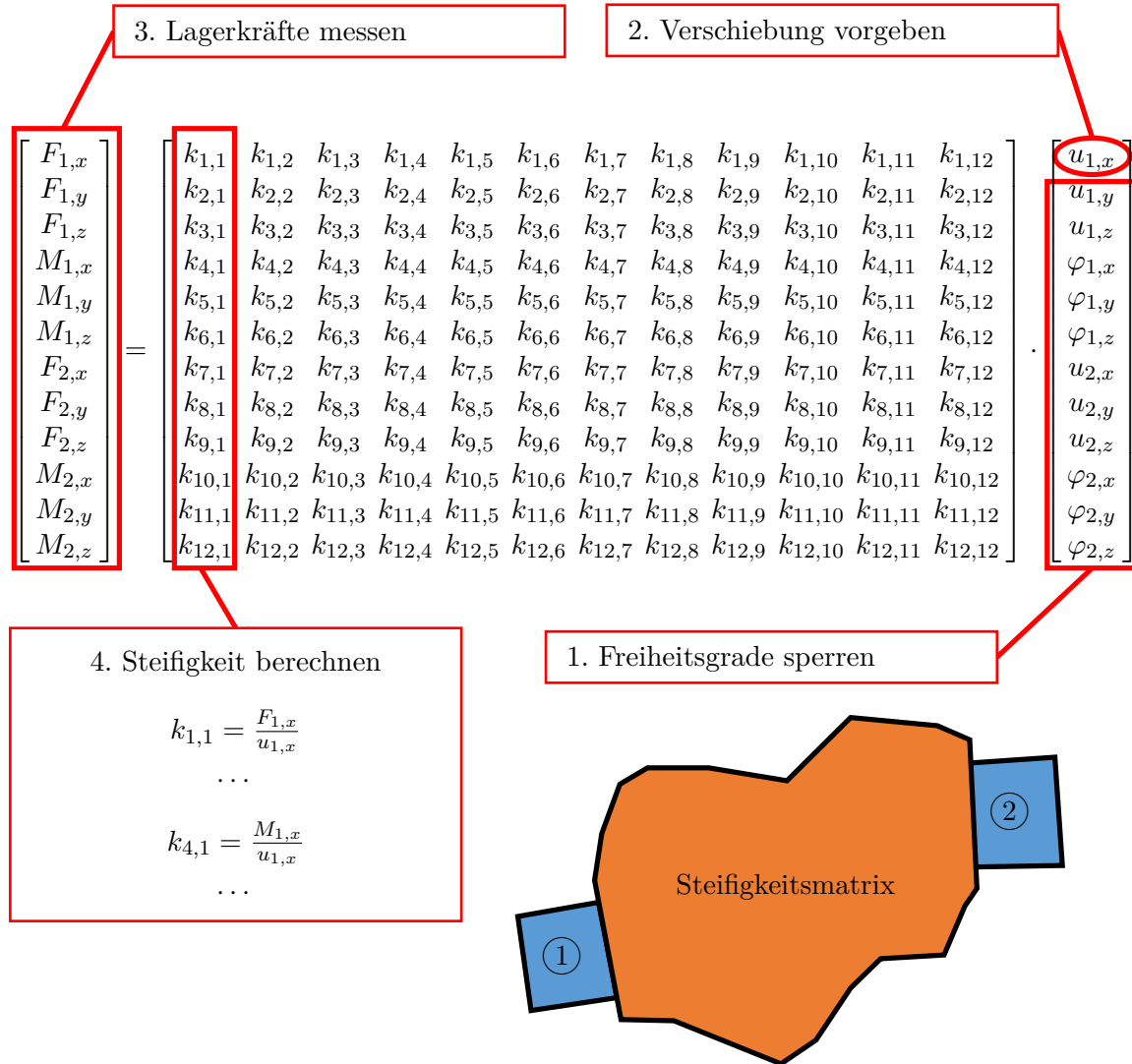


Abbildung 6.31: Berechnung der Steifigkeitsmatrix der Knotenversteifung aus den Lagerkräften und Verschiebungen

Die Abbildung 6.32 zeigt die simulationstechnische Umsetzung an den Verbindungspunkten. Am Balkenendpunkt ① sind die auftretenden Schnittgrößen dargestellt, welche an jedem Verbindungspunkt auftreten. Der Übergang vom Balken auf das Kontinuum wird über die in Abschnitt 6.4 beschriebenen MPC-Bedingungen hergestellt. Diese MPC-Bedingung verbindet den zentralen Punkt ② mit allen Knoten in Umfangsrichtung für jeweils drei Elementreihen in Längsrichtung mittels Balkenelementen. Die Vorgabe der

6. Automatisierte Simulation von Balkentragwerken und Implementierung von Knotensteifigkeiten

Kraft oder Verschiebung erfolgt an dem Punkt ②. Die Freiheitsgrade aller übrigen Verbindungspunkte werden über die erste Knotenreihe in Umfangsrichtung gesperrt.

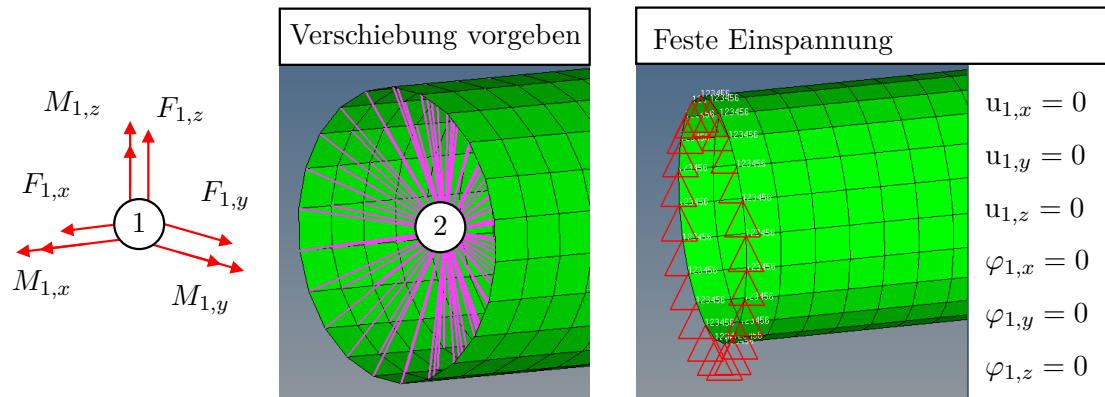


Abbildung 6.32: Lokale Verbindungspunkte; Schnittgrößen des Balkens am Endpunkt 1; aufbringen der Verschiebung am Punkt 2; feste Einspannung an anderen Enden

Die Abbildung 6.33 zeigt einen Prototypen eines vereinfachten Prüfstandes zur Ermittlung der Kennwerte. Das Bauteil wird in einem Rahmen aus Aluminium-Profilen eingespannt und durch einen pneumatischen Zylinder verformt. Dabei wird die Kraft durch eine Kraftmessdose und die Verschiebung durch ein Potentiometer am Verbindungsstück zwischen Prüfling und Kolbenstange gemessen. Im Gegensatz zur Ermittlung durch die Simulation muss jeder Eintrag der Steifigkeitsmatrix durch einen Einzelversuch ermittelt werden, bzw. kann durch den Prüfstand nicht abgebildet werden, wie beispielsweise die Drehfreiheitsgrade. Je nach Implementierung der Knotensteifigkeit in das Simulationsmodell können jedoch die ermittelten Werte ausreichend sein.

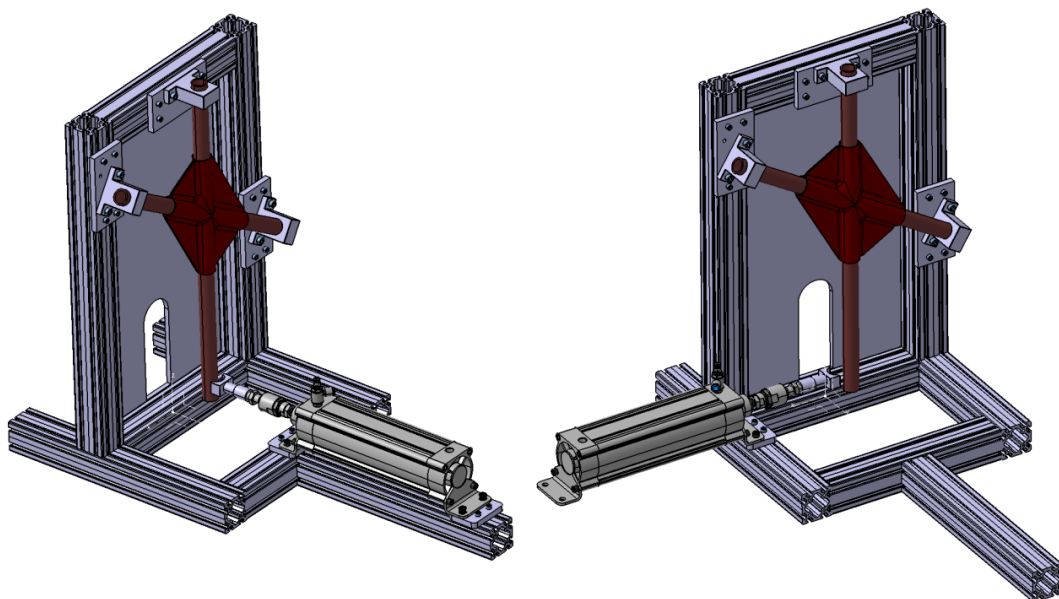


Abbildung 6.33: Prüfaufbau zur experimentellen Ermittlung der Knotensteifigkeit

6.5.3 Anwendung

Im Folgenden soll der qualitative Einfluss von zusätzlichen Knotensteifigkeiten in Abhängigkeit der Anzahl der versteiften Knoten ermittelt werden.

Die Simulationen werden an dem in Abbildung 6.34 dargestellten Überrollkäfig durchgeführt. Als Basis für diesen dient die in Abschnitt 6.4.3 untersuchte Topologie 3. Zur Nachbildung großer Biegeradien bestehen alle bisher betrachteten Topologien an den Knotenpunkten meist aus kurzen, aneinanderhängenden Balken. Diese werden für die weitere Simulation, soweit möglich, durch gerade Streben ersetzt. Hierdurch wird das Kürzen der Streben und die anschließende Verbindung durch den Gelenk-Verbinder erleichtert. Die vereinfachte Topologie wird im Folgenden als Topologie E bezeichnet.

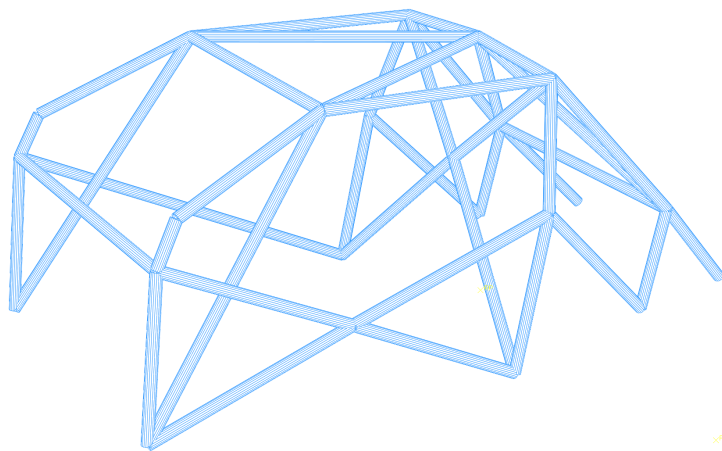


Abbildung 6.34: Topologie 3 mit vereinfachter Geometrie zur Anwendung der zusätzlichen Knotensteifigkeiten

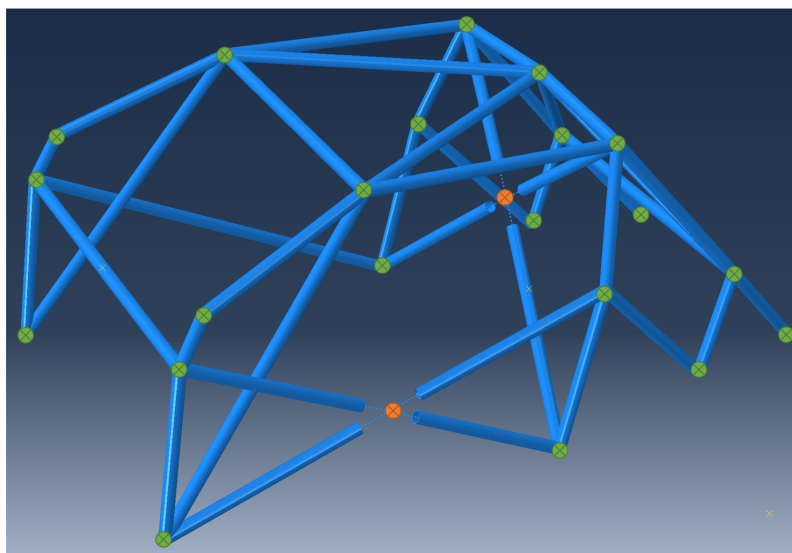


Abbildung 6.35: Topologie A; Aufbau über Einzelbalkenelemente und Verbindung über Tie/Joint-Connector mit Referenzpunkten; grün - Verbindung über Tie-Connector, orange - verkürzte Balken und Verbindung über Joint+Rotation-Connector

In Abbildung 6.35 sind die beiden unterschiedlichen Modellierungen der Knotenpunkte der Variante A eingetragen. Die Balken in den grün dargestellten Punkten sind jeweils durch einen Tie-Connector mit dem Referenzpunkt verbunden. An den orangefarben dargestellten Punkten sind die Balken verkürzt und mit einem Gelenk mit erhöhter Steifigkeit verbunden. Die Positionen für die Versteifungen sind das Türkreuz sowie das Kreuz am Hauptbügel. Für die noch zu ermittelnden Parameter der ausgeführten Knotenversteifungen wird eine Verkürzung vom 100 mm sowie eine zehnfache Steifigkeit der unverstärkten Verbindung gewählt.

Bei der Variante B werden zusätzlich zu den Versteifungen der vorhergehenden Variante noch die Knoten „A-Säule“, „B-Säule oben“, „B-Säule mitte“ und „Dachverstrebung“ gewählt (siehe Abb. 6.36). Dies entspricht den üblichen Positionen, an dem ein konventioneller Überrollkäfig zusätzlich versteift wird. Die Versteifung erfolgt durch eine Verkürzung der Balken an den Knotenpunkten, ebenfalls um 100 mm und für die Steifigkeit der Verbindung wird wiederum das Zehnfache der Ursprungssteifigkeit angenommen.

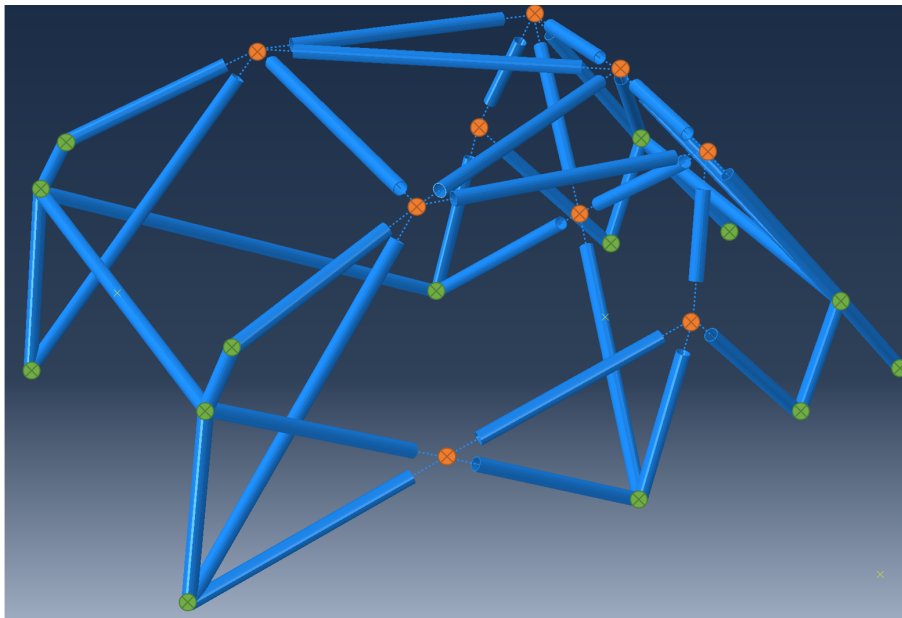


Abbildung 6.36: Topologie B; Aufbau über Einzelbalkenelemente und Verbindung über Tie/Joint-Connector mit Referenzpunkte; grün - Verbindung über Tie-Connector, orange - verkürzte Balken und Verbindung über Joint+Rotation-Connector

Bei der in Abbildung 6.37 dargestellten Variante C wird für jede Verbindung eine Versteifung des Knotens angenommen. Ausgenommen hierbei ist die Verbindung oberhalb des Armaturenbretts, da dies keinen Knotenpunkt darstellt, sondern dadurch lediglich der Radius angenähert wird. Durch die hohe Anzahl der nötigen Versteifungen ist die technische Umsetzung dieser Variante eingeschränkt, jedoch liefert diese Simulation einen theoretischen Maximalwert für die Verbesserung der Torsionssteifigkeit. Die Parameter zur Versteifung der Knotenpunkte entsprechen denen der vorherigen Varianten.

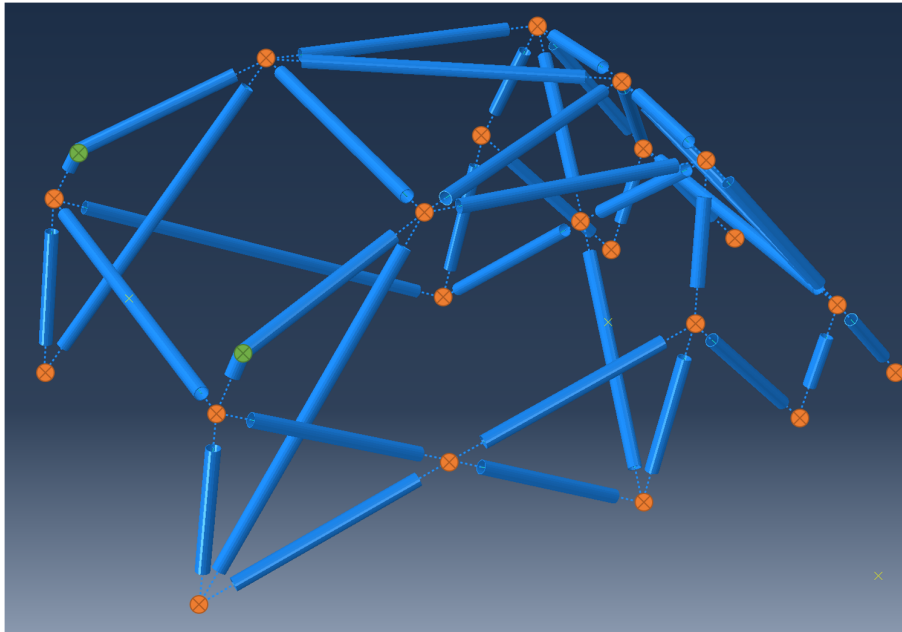


Abbildung 6.37: Topologie C; Aufbau über Einzelbalkenelemente und Verbindung über Tie/Joint-Connector mit Referenzpunkte; grün - Verbindung über Tie-Connector, orange - verkürzte Balken und Verbindung über Joint+Rotation-Connector

In Tabelle 6.5 sind die Ergebnisse der Fallstudie aufgelistet. Die vereinfachte Topologie E zeigt im Vergleich zur Ursprungstopologie eine um ca. 3 % erhöhte Torsionssteifigkeit. Für die weiteren Vergleiche wird diese Topologie als Basis gewählt.

Die Erhöhung der Torsionssteifigkeit bei der Variante A beträgt ca. 1 % und ist für den Anwendungsfall vernachlässigbar. Die Versteifungen der Variante B bewirken eine Verbesserung um 5,5 %, welche im Einsatz aber ebenfalls vernachlässigbar sein wird. Lediglich die voll ausgesteifte Variante C bietet eine relevante Verbesserung der Torsionssteifigkeit von 19,8 %.

Tabelle 6.5: Torsionssteifigkeiten der untersuchten Topologien in Abhängigkeit der zusätzlichen Knotensteifigkeiten

Variante	Knotensteifigkeiten	Torsionssteifigkeit	Verbesserung
Topologie 3	ohne	5877 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	−3,23 %
Topologie E	ohne	6073 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	-
Topologie A	2 Knoten	6138 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	1,06 %
Topologie B	9 Knoten	6429 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	5,54 %
Topologie C	21 Knoten	7575 $\frac{\text{Nm}}{\text{deg}}$	19,8 %

Auswirkungen der Knotensteifigkeiten auf das lokale Schädigungsverhalten

Es soll geprüft werden, ob die zusätzlichen Knotensteifigkeiten das lokale Schädigungsverhalten beeinflusst. In Tabelle 6.6 sind die maximalen Vergleichsspannungen für die Eindrückversuche an der A- und B-Säule dargestellt (siehe Abb. 2.7 und 2.8).

Tabelle 6.6: Höchste auftretende Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Lastfälle

Variante	Knotensteifigkeiten	A-Säule	B-Säule
Topologie E	ohne	276 MPa	405 MPa
Topologie A	2 Knoten	279 MPa	534 MPa
Topologie B	9 Knoten	330 MPa	419 MPa
Topologie C	21 Knoten	319 MPa	377 MPa

Beim „Eindrücktest A-Säule“ steigt der Höchstwert der Vergleichsspannung von Topologie A auf B sprunghaft an, während beim „Eindrücktest B-Säule“ der Höchstwert von Topologie E auf A ansteigt, um dann bis zur Topologie C wieder zu sinken. Es ist somit eine Abhängigkeit erkennbar, die im Folgenden auf Plausibilität überprüft werden soll.

In Abbildung 6.38 sind die Vergleichsspannungen für die Topologien A, B und C für den Lastfall „Eindrücktest A-Säule“ dargestellt. Die höchste Beanspruchung erfährt die Strebe [2]. Die sprunghafte Änderung ist auf die Knotenversteifung im Knoten ① zurückzuführen, welche ab der Topologie B berücksichtigt wird. Eine weitere Änderung der maximalen Vergleichsspannung wird durch eine zusätzliche Steifigkeit im Knoten ② verursacht.

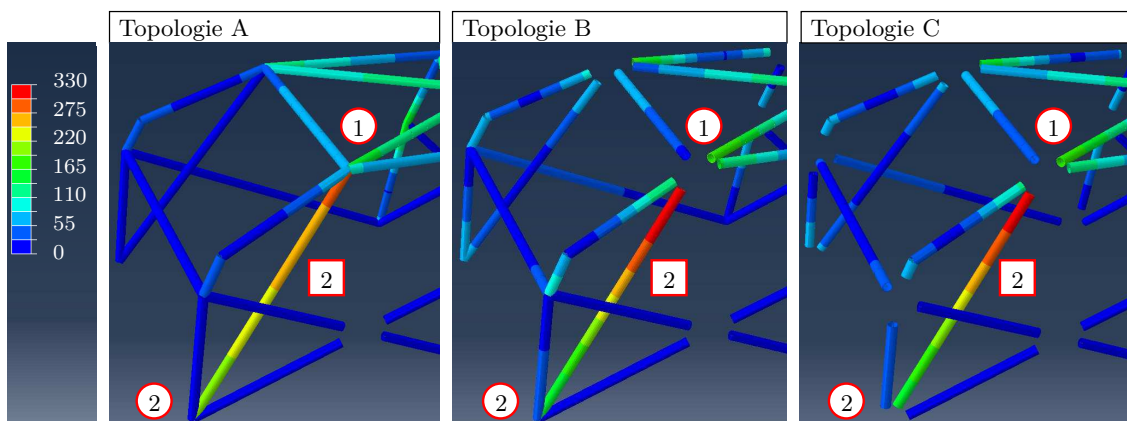


Abbildung 6.38: Vergleichsspannungsverlauf für Eindrücktest - A-Säule

Die Abbildung 6.39 zeigt die Vergleichsspannungen beim Lastfall „B-Säule“ für die Topologien E, A und B. Hier treten die höchsten Vergleichsspannungen am Knoten ② auf. Diese steigen bei Topologie A sprunghaft an, da im Knoten ① eine Versteifung in direkter Nähe eingebracht wird. Beide Knoten liegen im Lastpfad für den Versuch. Bei Topologie B und C (nicht dargestellt) sinken die Vergleichsspannungen, da der Knoten ② ebenfalls durch eine Knotensteifigkeit ersetzt wird und diese keine Auswertung der Spannungen zulässt.

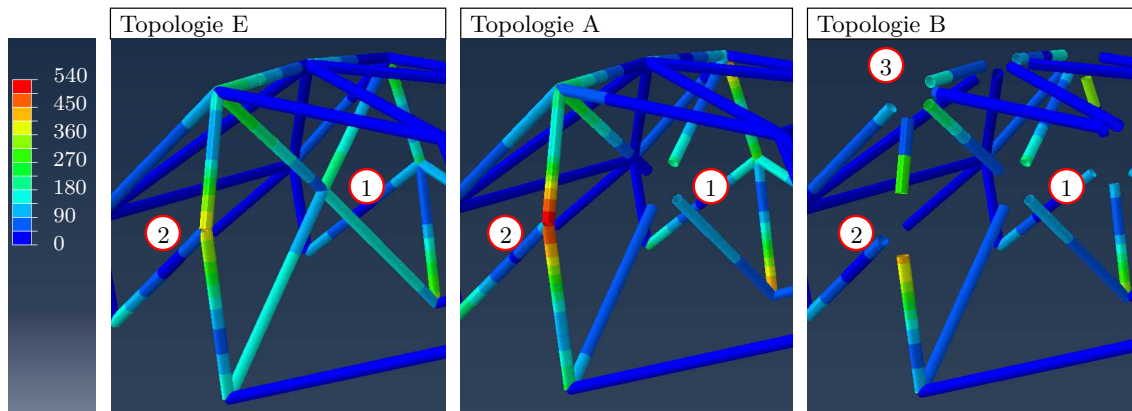


Abbildung 6.39: Vergleichsspannungsverlauf für Eindrücktest - B-Säule

In Abhängigkeit des verwendeten Stahles (siehe Abb. 2.6) liegen die berechneten Höchstspannungen im zulässigen bzw. unzulässigen Bereich. Zur Berücksichtigung von lokalen Effekten beispielsweise im Knoten wird eine konventionelle Berechnung mittels Schalenelementen empfohlen.

Zusammenfassung

Es konnte gezeigt werden, dass die Torsionssteifigkeit mit Verstärkung der Knoten erhöht werden kann. Allerdings beträgt die Verbesserung nur bei einer hohen Anzahl an Versteifungspunkten eine für den Einsatz relevante Größenordnung. Da insbesondere bei aufwendigen Knotenversteifungen viel Material eingebracht wird, erhöht sich das Gesamtgewicht um einen nicht mehr vernachlässigbaren Betrag. Zum Beispiel werden bei der Variante B neun Knotenpunkte versteift, was einem typischen Überrollkäfig entspricht, aber es wird dennoch nur eine Verbesserung um 5,5 % erzielt. Somit ergibt sich als Einsatzszenario für die Implementierung der zusätzlichen Knotensteifigkeit die Möglichkeit zur Überprüfung, welche Knotenversteifungen eingespart werden können und dadurch eine Gewichtsreduzierung erreicht werden kann. Weiterhin wurde eine Auswirkung der zusätzlichen Knotensteifigkeiten auf die maximalen Vergleichsspannungen beobachtet, welche mit dem gezeigten Verfahren bereits in der Grundauslegung näherungsweise berücksichtigt werden kann.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, eine Methode zur näherungsweisen Auslegung von Tragwerken aus Metall-Faserverbundkunststoffrohren zur Anwendung als Überrollschutz-Vorrichtung zu beschreiben.

Zunächst wird im Kapitel 2 der Grundlagen ein Überblick über die Literatur gegeben, welche Teilbereiche der Arbeit abdecken. Zum Leichtbau und Verbundwerkstoffe konnte ein Überblick über die Ausrichtung der einzelnen Quellen gegeben werden. Die Quellen zum Übertragungsmatrizen- und Deformationsverfahren beziehen sich hauptsächlich auf die Entwicklung der Verfahren. Eine aktuelle Anwendung der Verfahren findet nur vereinzelt statt, während die Veröffentlichungen zu den Hybridmaterialien hauptsächlich aus den letzten Jahren stammen. Eine Betrachtung von Überrollkäfigen findet nur vereinzelt statt. Weiterhin wird der Stand der Technik sowie die Anforderungen an die Überrollkäfige betrachtet. Obwohl bislang nur Stahl als Werkstoff zugelassen ist, unterscheiden sich die verwendeten Sorten deutlich in der Festigkeit. Damit gehen auch die verschiedenen Arten der Zertifizierung einher. Während niedrig feste Sorten hauptsächlich nach definierten Topologien gebaut werden und diese direkt eingesetzt werden können, werden hochfeste Stähle hauptsächlich für eigene Konstruktionen mit verringerten Wandstärken oder veränderter Topologie eingesetzt, die durch Versuch oder Simulation zertifiziert werden. Während die Anforderungen an den Überrollkäfig bzgl. der Sicherheit durch die Zertifizierung definiert sind, besteht zur Verbesserung der Fahrdynamik zusätzlich die Forderung nach der Erhöhung der Torsionssteifigkeit der Karosserie durch den Überrollkäfig. Abschließend zu den Grundlagen wird ein Konzept zur Anwendung der Hybridrohre für den Überrollkäfig vorgestellt. Die überwiegend geraden Rohre werden mittels CFK-Schalen zum Überrollkäfig verklebt. Am Beispiel eines Audi TT wurde eine Einbausimulation durchgeführt, bei der drei Teilbaugruppen definiert wurden, welche nach dem Einführen im Fahrzeug miteinander verklebt werden.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit den Grundlagen des Übertragungsmatrizenverfahrens zur Anwendung auf Balkentragwerke. Dabei werden die Größen an den Rändern in sogenannte Zustandsvektoren zusammengefasst und mit Hilfe von Übertragungsmatrizen, welche das Verhalten im Feld beschreiben, berechnet. Nach der Beschreibung der Begrifflichkeiten, der Koordinatensysteme und des grundsätzlichen Ablaufs, werden die Feldmatrizen für Biegung und Längsverschiebung aus den Balken-Differentialgleichungen hergeleitet. Ein Feld ist definiert als Abschnitt zwischen zwei Unstetigkeitsstellen, welche beispielsweise ein Lager, eine Umlenkung oder eine Einzelkraft sein können. Diese werden über die ebenfalls hergeleiteten Punktmatrizen berücksichtigt. Zur Modellierung

von verzweigten Tragwerken mit dem Übertragungsmatrizenverfahren werden ein Hauptstrang und ein oder mehrere Nebenstränge definiert. Die Nebenstränge werden über eine Punktmatrix an den Hauptstrang angefedert, welche ebenfalls abgeleitet werden. Als Alternative zum Übertragungsmatrizenverfahren bei verzweigten Systemen wird das Deformationsverfahren betrachtet, welches auf Steifigkeitsmatrizen basiert. Abschließend wird ein kombiniertes Verfahren betrachtet. Hierbei werden die Übertragungsmatrizen für einen Tragwerkstrang aufgestellt und aus diesen ein Makroelement zum Einsatz im Deformationsverfahren abgeleitet.

Im vierten Kapitel werden die Verfahren in MATLAB umgesetzt und mit diesen die Verschiebungen einzelner Knoten berechnet und mit einer Referenzlösung verglichen. Zunächst wird der allgemeine Ablauf der Verfahren sowie die Programmstruktur in MATLAB betrachtet. Es werden drei ebene Tragwerke definiert, das Grundtragwerk, das der Seitenansicht eines ausgeführten Überrollkäfigs entspricht, das erweiterte Tragwerk mit der zusätzlichen Verstrebung im Bereich der Tür und zur Anwendung des kombinierten Verfahrens eine Tragstruktur, analog der Vorderansicht in der Ebene der B-Säule. Beim Grundtragwerk weichen die Verschiebungen beim Deformationsverfahren im Vergleich zur FE-Lösung um ca. 6 % ab. Beim Übertragungsmatrizenverfahren sind die Abweichungen mit 9 % geringfügig höher. Das erweiterte Tragwerk kann nur noch mit dem Deformationsverfahren berechnet werden, da aufgrund der zusätzlichen Kreuzverstrebung kein hinreichender Hauptstrang definiert werden kann. Die Abweichungen liegen wie beim vorherigen Beispiel bei ca. 6 %. Das dritte Tragwerk wird mit dem kombinierten Verfahren berechnet. Als Besonderheit besitzt das Tragwerk einen Bogen, welcher mit einer Streckenlast belastet wird. Dieser Bogen wird mit dem Übertragungsmatrizenverfahren mit abschnittswisen geraden Feldern modelliert. Aus der entstehenden Produktmatrix werden das Makroelement und die Randschnittkräfte berechnet, die im Deformationsverfahren berücksichtigt werden. Zunächst werden Ergebnisse aus den FE-Berechnungen bei Verwendung der Linienkräften und den abgeleiteten Randschnittkräften verglichen, wobei sich eine mittlere Abweichung von ca. 10 % ergibt. Der Vergleich der Verschiebungen, die mit dem Deformationsverfahren (mit Makroelement und Randschnittkräften) berechnet werden, mit den Verschiebungen der FE-Referenzlösung (Lastaufbringung durch eine Linienkraft), zeigen Abweichungen von ca. 30 % beim gewählten Beispiel. Abschließend wird die Anwendung des Übertragungsmatrizenverfahrens zur Berechnung der Schnittkraftverläufe bei bekannten Zustandsgrößen an den Knoten betrachtet.

Im fünften Kapitel wird die Festigkeitsanalyse des Hybridrohres betrachtet. Ausgehend von Schnittgrößenverläufen soll das Versagen bzw. die Schädigung einzelner Bereiche des Rohrquerschnittes iterativ berechnet werden. Das Kapitel beginnt mit dem grundsätzlichen Ablauf der Festigkeitsanalyse mittels der klassischen Laminattheorie sowie mit der Beschreibung des zu berechnenden Hybridrohres. Es folgt eine Betrachtung der Spannung im Rohrquerschnitt. Bei Zug- und Druckbelastung sowie Biegung, treten ebenso Zug- und Druckspannungen im Rohrquerschnitt auf. Bei Beanspruchung mittels Querkraft und Torsion wirken umlaufende Schubspannungen. Die Festigkeitsanalyse soll an einer oder mehreren definierten Auswerteebenen erfolgen. Auf dieser Ebene wird der Rohrquerschnitt in einzelne Kreisringsegmente unterteilt, wobei die Höhe der Segmente einer Schicht des Hybridrohres entspricht. Weiterhin werden die Partial-Flächentragsmomente und Scheibensteifigkeiten der Kreisringsegmente berechnet und daraus Einzelwerte für den gesamten Rohrquerschnitt abgeleitet, die für die Berechnung der Schnittgrößenverläufe verwendet werden. Die Schädigung einzelner Kreisringsegmente wird über ein energiebasiertes Schädigungsmodell berechnet, bei welchem der Beginn der Schädigung über das

Hashin-Kriterium bestimmt wird. Beim nächsten Iterationsschritt der Berechnung werden die Steifigkeiten der betroffenen Kreisringsegmente entsprechend der Schädigung reduziert und die Werte für den E-Modul sowie der Flächenträgheitsmomente erneut bestimmt. Abschließend wird das Verfahren qualitativ an einem Beispiel gezeigt.

Im sechsten Kapitel erfolgt die Betrachtung der Topologie des Gesamtsystems. Zunächst wird das Python-Skript zur automatisierten Berechnung von Balkentragwerken in ABAQUS beschrieben. Die Auslegung der Topologie wird anhand einer Fallstudie demonstriert. Ausgehend von einer Referenz-Topologie werden neue Varianten abgeleitet und die Verschiebungen für typische Beanspruchungen bestimmt. Die Auswertung erfolgt über das Verhältnis der Steifigkeit gegenüber dem Gewicht und der Interpretation der Verschiebungen einzelner Balken. Weiterhin wird die Implementierung zusätzlicher Knotensteifigkeiten betrachtet, sodass nachträgliche Knotenverstärkungen bereits bei der Auslegung berücksichtigt werden. Zur Untersuchung des Einflusses zusätzlicher Knotensteifigkeiten werden diese schrittweise an den Verbindungspunkten der Rohre hinzugefügt und wiederum die Torsionssteifigkeit des Gesamtsystems ausgewertet. Bei einer angenommenen 10-fachen Steifigkeit gegenüber den unverstärkten Knoten ergeben sich die Versteifungswirkungen von ca. 1 % bei zwei Knoten, ca. 5 % bei neun Knoten und ca. 20 % bei 21 verstärkten Knoten. Die qualitative Studie zeigt, dass die Verbesserung der Torsionssteifigkeit bei einer praktikablen Anzahl an Verstärkungspositionen vernachlässigbar ist. Weiterhin wurden die Auswirkungen der Knotensteifigkeiten auf das lokale Schädigungsverhalten betrachtet, wobei je nach verwendetem Material die Festigkeit überschritten werden kann.

Ausblick

Abschließend sollen ausgewählte Themen zur Weiterführung der vorliegenden Arbeit aufgeführt werden.

Im sechsten Kapitel wird unter Anderem ein energiebasiertes Modell zur Berücksichtigung von Schädigung beschrieben und der Berechnungsalgorithmus anhand eines Fallbeispiels qualitativ demonstriert. Zur Berechnung von quantitativen Werten für die Festigkeit ist jedoch noch die Bestimmung der Materialkennwerte, insbesondere der Bruchenergie nötig und es wird eine Validierung im Versuch empfohlen. Am Ende des sechsten Kapitels wird der Ablauf zur iterativen „Optimierung“ des Lagenaufbaus beschrieben. Dieser erweitert die Schleife zur Berechnung des Elementversagens der Hybridrohre um eine äußere Schleife, welche in Abhängigkeit der Versagenskriterien Lagen aufbaut oder reduziert. Hierbei wird eine Umsetzung in MATLAB oder Python empfohlen.

Im siebten Kapitel wird die Auslegung der Topologie anhand von Variantenableitung und anschließenden A-B-Vergleichen beschrieben. Weiterhin werden zur Automatisierung zwei Lösungsansätze beschrieben. Zum einen die automatisierte Bewertung der A-B-Vergleiche und Generierung neuer Varianten und zum anderen eine Brute-Force-Methode zur Prüfung aller Varianten. Es wird eine Umsetzung über die Anpassung des bestehenden Simulationsablaufes empfohlen. Ebenso wurde im siebten Kapitel eine Methode zur Berücksichtigung von Knotenverstärkungen beschrieben und die Auswirkungen an einer Fallstudie qualitativ demonstriert. Zur quantitativen Bestimmung der Gesamtversteifungswirkung wird die Ermittlung der Knotensteifigkeiten mit den beschriebenen numerischen oder experimentellen Verfahren empfohlen.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Zulassung des Überrollkäfigs für den Einsatz im Rennbetrieb	21
2.2	Mindestausführung mit Beifahrer (vgl. [27])	22
2.3	Mindestausführung ohne Beifahrer (vgl. [27])	22
2.4	Test des Hauptbügels (vgl. [113])	22
2.5	Test des vorderen Bügels (vgl. [113])	22
2.6	Einteilung der Überrollkäfige nach Material	23
2.7	Schematische Darstellung: Eindrücktest - A-Säule Frontbügel; a) Vorderansicht; b) Seitenansicht	24
2.8	Schematische Darstellung des Eindrücktests - B-Säule Hauptbügel; a) Vorderansicht; b) Seitenansicht	24
2.9	Schematische Darstellung des Seiteneindrücktests; a) Vorderansicht; b) Draufsicht	25
2.10	Schematische Darstellung der Prüfung der Torsionssteifigkeit	26
2.11	Zielkonflikt und Variationsmöglichkeiten des Hybrid-Überrollkäfiges	26
2.12	Aufbau des Metall-Faserverbundkunststoff-Rohres	27
2.13	Konstruktionsprozess für Machbarkeitsstudie	27
2.14	3D-Scan der Rohkarosse (Quelle: Eigene Darstellung)	28
2.15	3D-Scan der Rohkarosse - Detail (Quelle: Eigene Darstellung)	28
2.16	Überrollkäfig in Differentialbauweise	29
2.17	Klebeschale zur Verbindung der Rohre; links - lackiert, rechts - unlackiert mit sichtbarer Deckschicht aus Aramid	29
2.18	Metall-Faserverbundkunststoff-Rohr; links - Querschnitt mit Fertigungsdecklage; rechts - mit aufgebrachter Decklage aus ballistischem Polyamid als Alternativschicht zu Aramid	30
2.19	Teilbaugruppen des Hybrid-Überrollkäfigs; a) „Bügel A-Säule“, b) „Bügel B-Säule“ und c) „Abstützung C-Säule“	30
2.20	Fügung der Teilbaugruppen mit CFK-Schalen durch kleben	31
2.21	Kollisionsanalyse des Einbauvorganges des „Bügel A-Säule“	31
3.1	Beliebig gestützter Durchlaufträger mit eingetragenen Lasten und Zustandsvektoren sowie Benennung der Felder und Lagerstellen (vgl. [59])	33
3.2	Definition der Schnittkräfte und Deformationen im Raum (vgl. [59])	33
3.3	Definition der Schnittkräfte und Deformationen in der x - z -Ebene	34
3.4	Physikalische Interpretation des Aufbaus der Feldmatrix (vgl. [48])	35
3.5	Einteilung des Tragwerkes in Felder	36

3.6	Einzelfeld mit Lagerungen und Querlast q_k ; Freigeschnittenes Einzelfeld mit Schnittkräften (vgl. [59])	37
3.7	Festlager mit Sprunggröße $F_{Q,i}^s$	41
3.8	Elastische Stütze mit Sprunggröße $F_{Q,i}^s$	42
3.9	Elastische drehbare Stütze Sprunggröße M_i^s	42
3.10	Gelenk mit Winkel φ_i^s als Sprunggröße	42
3.11	Freigeschnittener Träger und Stütze mit Schnittkräften (vgl. [59])	42
3.12	Knick im Träger mit eingetragenen Sprunggrößen	44
3.13	Beliebig gestützter Durchlaufträger mit Benennung der Felder, Punkte sowie der lokalen Koordinatensysteme (vgl. [59])	45
3.14	Ebenes offenes Rahmentragwerk (vgl. [59])	46
3.15	Fest eingespannte Stütze von horizontal verschieblichen Durchlaufrahmen bei Berücksichtigung der Dehnsteifigkeit der Stütze	47
3.16	Anteil der Durchsenkung der Stütze auf die Knotenkraft (vgl. [59])	47
3.17	Anteil der Biegung der Stütze auf die Knotenkraft (vgl. [59])	48
3.18	Anteil der Verdrehung der Stütze auf die Knotenkraft (vgl. [59])	48
3.19	Kräfte und Momente auf Knoten zur Modellierung von äußeren Lasten	49
3.20	Symbol für Anfederung der fest eingespannten Stütze mit endlicher Längsteifigkeit und horizontal beweglichem Träger	50
3.21	Ebenes offenes Rahmentragwerk. Die Nebenstränge werden als elastisch dreh- und dehbare Stützen an den Hauptstrang angefedert. (vgl. [59])	51
3.22	Abgeändertes, ebenes, offenes Rahmentragwerk mit eingetragenen Punkt- und Feldmatrizen	51
3.23	Balken mit Randverschiebungen und Randschnittkräften im globalen Koordinatensystem (vgl. [48])	53
4.1	Übersicht der verwendeten Verfahren; Tragwerk links - Berechnung mit dem Übertragungsmatrizen- und dem Deformationsverfahren; Tragwerk rechts - Abschnitt 1) Berechnung mit dem Übertragungsmatrizenverfahren; Gesamtsystem 2) Berechnung mit dem Deformationsverfahren	59
4.2	Ablaufplan zur Berechnung eines unverzweigten Trägers mit dem Übertragungsmatrizenverfahren	60
4.3	Ablaufplan zur Berechnung von Rahmentragwerken mit dem Übertragungsmatrizenverfahren	61
4.4	Ablaufplan zur Berechnung eines Rahmentragwerken mit einem kombinierten Übertragungsmatrizen-/Deformationsverfahren	62
4.5	Ablauf der Skripte und Funktionen in MATLAB	63
4.6	Vereinfachtes ebenes Rahmentragwerk mit eingetragenen Lasten	64
4.7	Lokale Koordinatensysteme und Bezeichnungen der Knoten, Balken und Transformationswinkel und Definition des Hauptstrangs	66
4.8	Definition der Transformationswinkel und der lokalen Koordinatensysteme für das Deformationsverfahren	68
4.9	Erweitertes Tragwerk zur Berechnung mit dem Deformationsverfahren	70
4.10	Definition der lokalen Koordinatensysteme	71
4.11	Hauptbügel B-Säule als vereinfachtes ebenes Rahmentragwerk mit eingetragenen Lasten sowie Benennung der Felder und Knoten	72
4.12	Definition der lokalen Koordinatensysteme des Hauptbügels B-Säule	73

4.13	Tragwerksstrang zur Ableitung eines Markoelementes; a) gekrümmter Balken mit Streckenlast in negativer z -Richtung; b) Modellierung mit abschnittsweise geraden Balken; c) Zerlegung der Streckenlast in Komponenten	74
4.14	Grundtragwerk zum Vergleich der Ergebnisse mit dem Übertragungsmatrizen- und Deformationsverfahren mit einer Referenzlösung	77
4.15	Erweitertes Tragwerk zum Vergleich der Ergebnisse des Deformationsverfahren mit einer Referenzlösung	78
4.16	Hauptbügel B-Säule als vereinfachtes ebenes Tragwerk; Modellierung des Bogens mit Streckenlast als Makroelement; Berechnung des Gesamttragwerkes mit dem Deformationsverfahren	79
4.17	Bogen - Bezeichnung der Knoten	79
4.18	Ebenes Tragwerk zur Anwendung des Übertragungsmatrizenverfahrens zur Berechnung der Schnittgrößen-/Deformationsverläufe am Balken 2	81
4.19	Verschiebung u und Durchbiegung w über der Balkenlängsachse	82
4.20	Biegewinkel φ und Biegemoment M über der Balkenlängsachse	83
4.21	Normalkraft F_N und Querkraft F_Q über der Balkenlängsachse	83
5.1	Ablauf der Spannungs- und Verzerrungsanalyse eines MSV (vgl. [98]) . . .	85
5.2	Berechnungsablauf zur Festigkeitsbewertung von Hybridrohr-Strukturen . .	87
5.3	Ebenes Tragwerk zur Festigkeitsanalyse des Lagenaufbaus des Balken 2 . .	87
5.4	Balken mit eingetragenen Abmessungen und aufgebrachten Lasten	88
5.5	Normalkraft F_N , Querkraft F_Q und Biegemoment M über Balkenlängsachse	88
5.6	Aufbau des Metall-Faserverbundkunststoff-Rohr	89
5.7	Spannungsverteilung bei Zug-Beanspruchung in x -Richtung	90
5.8	Verteilung der Schubspannung bei Querkraft-Beanspruchung in z -Richtung; a) Rohrquerschnitt mit Koordinatensystem und eingetragener Last; b) Schubspannungsverteilung $\bar{\tau}(\gamma)$	90
5.9	Zug- und Druckspannung bei Biegung um die y -Achse	91
5.10	Schubspannung bei Torsion um die x -Achse; a) Rohrquerschnitt mit Koordinatensystem und Moment M_T ; b) Umlaufende Schubspannung $\bar{\tau}$	91
5.11	Ebene zur Auswertung der Spannungen zur Festigkeitsanalyse	92
5.12	Diskretisierung des Rohrquerschnittes durch Teilung in m konzentrische Kreisinge und in n Kreisingsektoren	93
5.13	Kreisingsegment zur Berechnung der Flächenträgheitsmomente	93
5.14	Transversale Isotropie; a) Isotropieebene x_2 - x_3 ; b) isotrope Scheibe mit Spannungen σ_2, σ_3 und den Schubspannungen $\sigma_4 = \tau_{23}, \sigma_5 = \tau_{31}$ und $\sigma_6 = \tau_{12}$ (vgl. [4])	95
5.15	Globales Koordinatensystem (xy) und Faserkoordinatensystem (12) mit Faserwinkel α (vgl. [98])	96
5.16	Ebener Spannungszustand an einem Mehrschichten-Laminat als Scheibenelement (vgl. [98])	97
5.17	Kräfteäquivalenz zw. Laminat und Einzelschichten; a) Kraftfluss n_x auf Laminatmittelebene; b) Schicht-Kraftflüsse $n_{x,1}, n_{x,2}$ und $n_{x,3}$ (vgl. [98]) .	98
5.18	Kreisingsegment zur Berechnung der Scheibensteifigkeit \mathbf{A}	99
5.19	Ebene zur Auswertung der Spannungen zur Festigkeitsanalyse	100

5.20	Schematischer Querschnitt mit eingetragenen Balkenschnittkräften F_N , F_Q und M_y sowie Kreisringsegment zur Festigkeitsanalyse mit Linienschnittkräften n_x und n_{xy}	101
5.21	Versagenskörper nach Hashin für den ebenen Spannungszustand (vgl. [28])	104
5.22	Energiebasierte Schädigungsentwicklung; Vergleichsdehnung δ_{eq} ; Beginn der Schädigung bei δ_{eq}^0 ; Versagen bei δ_{eq}^f ; Vergleichsspannung bei Beginn der Schädigung σ_{eq}^0 ; Bruchenergie G	105
5.23	Qualitativer Verlauf des Schädigungsparameters d_n	107
5.24	Balken mit eingetragenen Abmessungen und aufgebrachten Lasten	108
5.25	Festigkeitsbewertung des Hybridrohres	109
5.26	Festigkeitsbewertung des Hybridrohres - Schädigung	110
5.27	Festigkeitsbewertung des Hybridrohres - Durchsenkung w	111
5.28	Ablauf einer iterativen Optimierung des Lagenaufbaus	112
6.1	Ordnerstruktur für Simulation	115
6.2	Übersicht der Funktionsweise der Skripte	115
6.3	Python-Skript zur Modellerstellung in ABAQUS (I)	116
6.4	Python-Skript zur Modellerstellung in ABAQUS (II)	117
6.5	Python-Skript zur Modellerstellung in ABAQUS (III)	118
6.6	Python-Skript zur Modellerstellung in ABAQUS (IV)	119
6.7	Referenzüberrollkäfig mit zu untersuchenden Topologien	120
6.8	Modellaufbau - Quasi-statischer Lastfall	121
6.9	Modellaufbau - Torsionslastfall	122
6.10	Untersuchung des Einflusses der Türstreben; a) Bereich der Verstrebung - Tür Fahrerseite; b) Bereich der Verstrebung - Tür Beifahrerseite	123
6.11	Schematische Darstellung der Tür-Verstreben; a) Topologie 1 - Türkrenz auf Fahrerseite; keine Verstrebung auf Beifahrerseite; b) Topologie 2 - Türkrenz auf Fahrerseite; Querstrebe auf Beifahrerseite	123
6.12	Vergleich der simulierten Balkenmodelle; Grundkäfig identisch in allen Varianten; links - Unterschiede zwischen Topologie 0 und Topologie 1; rechts - Unterschiede zwischen Topologie 0 und Topologie 2	124
6.13	Amplitude der Verschiebungen bei Belastung von Knoten 1 (A-Säule); Links: Referenz-Überrollkäfig; Rechts: Variante Dachstrebe in der Ebene	124
6.14	Verschiebungen der Dachstrebe bei Belastung des Knoten 1 (A-Säule); Links: Referenz-Überrollkäfig; Rechts: Variante Dachstrebe in der Ebene	125
6.15	Spreizung des Hauptbügels bei Belastung durch vertikale Last; Links: Referenz-Überrollkäfig; Rechts: Variante ohne Gurtstrebe	125
6.16	Vergleich der Verschiebungsfelder in z -Richtung beim Torsionssteifigkeitsversuch für Topologie 1 und 2	126
6.17	Untersuchung des Einflusses der Dach-Verstrebung sowie der Verstrebung der Stütze C-Säule; a) Bereich der Dach-Verstrebung; b) Bereich der Verstrebung der Stütze C-Säule	126
6.18	Schematische Darstellung der Dach-Verstrebung sowie der Verstrebung der Stütze C-Säule; a) Topologie 3 - V-Verstrebung im Dach-Bereich; V-Strebe in der Stütze C-Säule; b) Topologie 4 - Diagonalverstrebung im Dach-Bereich; Diagonalstrebe in der Stütze C-Säule	127

6.19	Vergleich der simulierten Balkenmodelle; Grundkäfig identisch in allen Varianten; links - Unterschiede zwischen Topologie 0 und Topologie 3; rechts - Unterschiede zwischen Topologie 0 und Topologie 4	127
6.20	Verschiebungsverlauf bei Belastung des Knoten 1 (A-Säule); Links: Topologie 3; Rechts: Topologie 4	128
6.21	Spreizung des Hauptbügels bei Belastung durch vertikale Last; Links: Topologie 3 mit zusätzlicher Abstützung; Rechts: Topologie 4	128
6.22	Vergleich der Verschiebungsfelder in z -Richtung beim Torsionssteifigkeitsversuch für Topologie 3 und 4	129
6.23	Versteifungen der Knoten; links - Bügel aus Porsche 911 GT3 versteift mit Knotenblech; rechts - Konzept für Dachstreben mit Klebeschalen	131
6.24	Basis-Konnektor-Elemente; 1) Join - Translatorische Verknüpfung der Knoten a und b; 2) Rotate - Drehfreiheitsgrad zwischen Knoten a und b; mit Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 (vgl. [23])	131
6.25	Aufteilung von Balkenelementen zur Verknüpfung mit einem Gelenk	133
6.26	Biegelinie des einseitig eingespannten Balkens; oben - Verbindung über Gelenk mit Steifigkeit \gg Biegesteifigkeitsäquivalent; unten - Verbindung über Gelenk mit Steifigkeit $<$ Biegesteifigkeitsäquivalent	133
6.27	Verkürzung der geteilten Balkenelemente um die Länge einer fiktiven Knotenversteifung und Verbindung mit einem Gelenk	134
6.28	Biegelinie des einseitig eingespannten Balkens; oben - Verbindung über Gelenk mit Steifigkeit $\hat{=}$ Biegesteifigkeitsäquivalent des Balkens; mitte - Verbindung über Gelenk mit Steifigkeit $<$ Biegesteifigkeitsäquivalent des Balkens; unten - Verbindung über Gelenk mit Steifigkeit $>$ Biegesteifigkeitsäquivalent des Balkens	135
6.29	Kreuz mit Gelenkverbinder; links - Randbedingungen für Simulation; rechts - Verbindung über Referenzpunkt zur Verknüpfung von mehreren Balken in einem Knotenpunkt	135
6.30	Vereinfachtes Knotenmodell zur Ermittlung der Knotensteifigkeit	136
6.31	Berechnung der Steifigkeitsmatrix der Knotenversteifung aus den Lagerkräften und Verschiebungen	137
6.32	Lokale Verbindungspunkte; Schnittgroen des Balkens am Endpunkt 1; aufbringen der Verschiebung am Punkt 2; feste Einspannung an anderen Enden	138
6.33	Prüfaufbau zur experimentellen Ermittlung der Knotensteifigkeit	138
6.34	Topologie 3 mit vereinfachter Geometrie zur Anwendung der zusätzlichen Knotensteifigkeiten	139
6.35	Topologie A; Aufbau über Einzelbalkenelemente und Verbindung über Tie/Joint-Connector mit Referenzpunkten; grün - Verbindung über Tie-Connector, orange - verkürzte Balken und Verbindung über Joint+Rotation-Connector	139
6.36	Topologie B; Aufbau über Einzelbalkenelemente und Verbindung über Tie/Joint-Connector mit Referenzpunkte; grün - Verbindung über Tie-Connector, orange - verkürzte Balken und Verbindung über Joint+Rotation-Connector	140
6.37	Topologie C; Aufbau über Einzelbalkenelemente und Verbindung über Tie/Joint-Connector mit Referenzpunkte; grün - Verbindung über Tie-Connector, orange - verkürzte Balken und Verbindung über Joint+Rotation-Connector	141
6.38	Vergleichsspannungsverlauf für Eindrücktest - A-Säule	142
6.39	Vergleichsspannungsverlauf für Eindrücktest - B-Säule	143

Tabellenverzeichnis

2.1	Materialvorschriften für den Bau eines Überrollkäfigs nach dem DMSB-Handbuch (vgl. DMSB [27] und FIA Technical Department [38])	22
2.2	Prüfkraft und Abmessungen des Stempels für Frontbügel-Eindrücktest [40]	24
2.3	Prüfkraft und Abmessungen des Stempels für Hauptbügel-Eindrücktest [40]	25
2.4	Prüfkraft und Abmessungen des Stempels für Seiteneindrücktest [40] . . .	25
3.1	Belastungsfunktionen mit Wirkrichtungen	34
3.2	Lagerarten mit Randbedingungen und Freigrößen (vgl. [5])	45
4.1	Koordinaten des ebenen Rahmentragwerkes	64
4.2	Länge und Winkel der Einzelträger des Rahmentragwerkes	65
4.3	Kennwerte der im Tragwerk verwendeten Balken	65
4.4	Parameter der Balken zur Berechnung	65
4.5	Koordinaten des ebenen Rahmentragwerkes	73
4.6	Länge und Winkel der Einzel- träger des Rahmentragwerkes	73
4.7	Länge und Winkel der Teilabschnitte des Bogen 3	74
4.8	Auswertung der Verschiebungen an den Knoten 4 und 5	77
4.9	Auswertung der Verschiebungen an den Knoten 3 und 4	78
4.10	Verschiebungen w^{yz} des Bogen; fest eingespannt an Knoten 3 und 4	79
4.11	Verschiebungen w^{xz} am Knoten 3 und 4 beim Tragwerk mit Bogen	80
4.12	Verschiebungen w^{xz} am Knoten 3 und 4 beim Tragwerk mit geradem Balken	80
4.13	Verschiebungen am Knoten 2 und 4 im x_2 - z_2 -Koordinatensystem	81
5.1	Lagenaufbau des Metall-Faserverbundkunststoff-Rohr	89
5.2	Materialkennwerte der Einzellagen [106, 122]	89
6.1	Ergebnisse des Vergleichs der Verstrebung Tür Beifahrerseite	124
6.2	Ergebnisse des Vergleichs der Verstrebung Dach und der Stütze C-Säule . .	128
6.3	Übersicht der Verformungen, Torsionssteifigkeiten und Gewicht der unter- suchten Topologien	129
6.4	Verschiebungen am Kraftangriffspunkt in Abhängigkeit der Steifigkeit der Gelenkverbindung	136
6.5	Torsionssteifigkeiten der untersuchten Topologien in Abhängigkeit der zu- sätzlichen Knotensteifigkeiten	141
6.6	Höchste auftretende Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Lastfälle . . .	142

Literatur

- [1] S. Abrate, B. Castanie und Y. D. S. Rajapakse, Hrsg. *Dynamic Failure of Composite and Sandwich Structures*. Bd. 192. Solid Mechanics and its Applications. New York: Springer, 2012. ISBN: 978-94-007-5328-0.
- [2] Altair Engineering. *HyperMesh Advanced Training*. 2001.
- [3] H. Altenbach, J. Altenbach und W. Kissing. *Mechanics of Composite Structural Elements*. Singapore: Springer, 2018. ISBN: 978-981-10-8934-3.
- [4] H. Altenbach, J. Altenbach und R. Rikards. *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke: Modellierung und Berechnung von Balken und Platten aus Verbundwerkstoffen*. Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 2001. ISBN: 3-342-00681-1.
- [5] H. Balke. *Einführung in die Technische Mechanik: Statik*. Berlin: Springer, 2007. ISBN: 3-540-44619-2.
- [6] M. R. Bambach. “Fibre Composite Strengthening of Thin-walled Steel Vehicle Crush Tubes for Frontal Collision Energy Absorption”. In: *Thin-Walled Structures* 66 (2013), S. 15–22. ISSN: 02638231.
- [7] M. R. Bambach, M. Elchalakani und X. L. Zhao. “Composite Steel–CFRP SHS Tubes under Axial Impact”. In: *Composite Structures* 87.3 (2009), S. 282–292. ISSN: 02638223.
- [8] E. J. Barbero. *Finite Element Analysis of Composite Materials*. Boca Raton: CRC Pres Taylor & Francis, 2008. ISBN: 1-4200-5433-3.
- [9] E. J. Barbero. *Finite Element Analysis of Composite Materials using Abaqus*. Boca Raton: CRC Press, 2013. ISBN: 978-1-4665-1661-8.
- [10] E. J. Barbero. *Introduction to Composite Materials Design*. Boca Raton: Taylor & Francis, 2011. ISBN: 978-1-4200-7915-9.
- [11] E. J. Barbero u. a. “Determination of Material Parameters for Abaqus Progressive Damage Analysis of E-glass Epoxy Laminates”. In: *Composites Part B: Engineering* (2013). ISSN: 13598368.
- [12] H. W. Bergmann. *Konstruktionsgrundlagen für Faserverbundbauteile*. Berlin: Springer, 1992. ISBN: 978-3-642-48386-8.
- [13] J.-M. Berthelot. *Composite Materials - Mechanical Behavior and Structural Analysis*. New York: Springer, 2013. ISBN: 1461268036.
- [14] BETA CAE Systems. *ANSA version 19.1.x User’s Guide*. 2019.

- [15] K. Beyer. *Statik im Eisenbetonbau*. Berlin: Springer, 1927. ISBN: 9783662408865.
- [16] S. Boria, A. Scattina und G. Belingardi. “Axial Crushing of Metal-composite Hybrid Tubes: Experimental Analysis”. In: *Procedia Structural Integrity* 8 (2018), S. 102–117. ISSN: 24523216.
- [17] J. C. Both. “Tragfähigkeit von CFK-Metall-Laminaten unter mechanischer und thermischer Belastung”. Diss. Technische Universität München, 2013.
- [18] H. Bufler. “Die Bestimmung des Spannungs- und Verschiebungszustandes eines geschichteten Körpers mit Hilfe von Übertragungsmatrizen”. In: *Ingenieur-Archiv* 4 (1962).
- [19] J. Chen, E. V. Morozov und K. Shankar. “Progressive Failure Analysis of Perforated Aluminium/CFRP Fibre Metal Laminates using a Combined Elastoplastic Damage Model and Including Delamination Effects”. In: *Composite Structures* 114 (2014), S. 64–79. ISSN: 02638223.
- [20] L. Coox u. a. “Numerical Assessment of the Impact of Vehicle Body Stiffness on Handling Performance”. In: *LMS International, Proceedings of ISMA2012-USD2012* (2012), S. 3711–3724.
- [21] G. Czerwenka und W. Schnell. *Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus*. Mannheim: Bibliogr. Inst., 1967.
- [22] G. Czerwenka und W. Schnell. *Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus II*. Mannheim: Bibliogr. Inst., 1970.
- [23] Dassault Systèmes. *Abaqus Analysis User’s Guide*. 2016.
- [24] Dassault Systèmes. *Abaqus Scripting User’s Guide*. 2016.
- [25] S. Dieker und H.-G. Reimerdes. *Elementare Festigkeitslehre im Leichtbau*. Bremen: Donat, 2005. ISBN: 3-924444-58-7.
- [26] M. Dlugosch u. a. “Experimental Investigation and Evaluation of Numerical Modeling Approaches for Hybrid-FRP-steel Sections under Impact Loading for the Application in Automotive Crash-structures”. In: *Composite Structures* 174 (2017), S. 338–347. ISSN: 02638223.
- [27] DMSB. *Automobilsport - Handbuch*. Frankfurt: Deutsche Motor Sport Wirtschaftsdienst GmbH, 2018.
- [28] K. Drechsler. *Vorlesungsskript - Analysis and Design of Composite Structures*. 2010.
- [29] G. J. Dvorak. *Micromechanics of Composite Materials*. Bd. 186. Solid Mechanics and its Applications. Dordrecht: Springer, 2013. ISBN: 978-94-007-4100-3.
- [30] G. W. Ehrenstein. *Faserverbund-Kunststoffe: Werkstoffe - Verarbeitung - Eigenschaften*. München: Hanser, 2006. ISBN: 3-446-22716-4.
- [31] P. Ermanni. *Vorlesungsskript - Faserverstärkte Kunststoffe*. Zürich, 2012.
- [32] S. Falk. “Biegen, Knicken und Schwingen des mehrfeldrigen geraden Balkens”. In: *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft* 7 (1955), S. 74–92.
- [33] S. Falk. “Das direkte (natürliche) Reduktionsverfahren”. In: *ACTA MECHANICA* 54 (1984), S. 49–62.
- [34] S. Falk. “Das direkte (natürliche) Reduktionsverfahren, Teil II”. In: *ACTA MECHANICA* 62 (1986), S. 5–18.

- [35] S. Falk. “Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren”. In: *Ingenieur-Archiv* 24.3 (1956), S. 216–232.
- [36] S. Falk. “Die Berechnung geschlossener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren”. In: *Ingenieur-Archiv* (1957), S. 96–109.
- [37] S. Falk. “Die Berechnung offener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren”. In: *Ingenieur-Archiv* (1958), S. 61–80.
- [38] FIA Sport / Technical Department. *2016 – Annexe J / Appendix J – Article 253–8 – Equipements de Sécurité / Safety Equipment*. 2016.
- [39] FIA Sport / Technical Department. *2020 – Annexe J / Appendix J – Article 281 – Classification et Définitions des Véhicules Tout-Terrain / Classification and Definitions of Cross-Country Vehicles*. 2019.
- [40] FIA Sport / Technical Department. *Règlement d’homologation 2013 pour Armatures de Sécurité / 2013 Homologation Regulations for Safety Cages*. 2012.
- [41] M. Flemming, G. Ziegmann und S. Roth. *Faserverbundbauweisen: Fasern und Matrices*. Berlin: Springer, 1995. ISBN: 978-3-642-63352-2.
- [42] M. Flemming, G. Ziegmann und S. Roth. *Faserverbundbauweisen: Fertigungsverfahren mit duroplastischer Matrix*. Berlin: Springer, 1999. ISBN: 978-3-642-63557-1.
- [43] M. Flemming, G. Ziegmann und S. Roth. *Faserverbundbauweisen: Halbzeuge und Bauweisen*. Berlin: Springer, 1996. ISBN: 978-3-642-64840-3.
- [44] H. E. Friedrich. *Leichtbau in der Fahrzeugtechnik*. Wiesbaden: Springer, 2017. ISBN: 978-3-658-12294-2.
- [45] R. Gasch, K. Knothe und R. Liebich. *Strukturdynamik: Diskrete Systeme und Continua*. Berlin: Springer, 2012. ISBN: 9783540889762.
- [46] F. Gassara u. a. “Optimization of Springback in L-bending Process using a Coupled Abaqus/Python Algorithm”. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 44.1-2 (2009), S. 61–67.
- [47] D. Gay. *Composite materials: Design and applications*. Boca Raton: CRC Press, 2015. ISBN: 978-1-4665-8488-4.
- [48] W. Graf und T. Vassilev. *Einführung in computerorientierte Methoden der Baustatik*. Berlin: Ernst, 2006. ISBN: 978-3-433-01857-6.
- [49] D. Gross u. a. *Technische Mechanik: Band 2: Elastostatik*. Berlin: Springer, 2007. ISBN: 978-3-540-70762-2.
- [50] K. Habr. “Gekoppelte Simulation Hydraulischergesamtsysteme unter Einbeziehung von CFD”. Diss. Technische Universität Darmstadt, 2002.
- [51] J. Haedir und X.-L. Zhao. “Design of CFRP-Strengthened Steel CHS Tubular Beams”. In: *Journal of Constructional Steel Research* 72 (2012), S. 203–218. ISSN: 0143974X.
- [52] J. Haedir u. a. “Analysis of CFRP Externally-Reinforced Steel CHS Tubular Beams”. In: *Composite Structures* 92.12 (2010), S. 2992–3001. ISSN: 02638223.
- [53] B. Harris. *Fatigue in composites: Science and technology of the fatigue response of fibre-reinforced plastics*. Boca Raton: CRC Press, 2003. ISBN: 0-8493-1767-3.
- [54] Z. Hashin. “Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites”. In: *Journal of Applied Mechanics* 47 (1980), S. 329–334.

- [55] H. Hasselgruber. “Die Berechnung von erzwungenen, gedämpften Drehschwingungsketten mit Hilfe von Übertragungsmatrizen”. In: *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens* 26 (1960).
- [56] H. Holzer. *Die Berechnung der Drehschwingungen und ihre Anwendung im Maschinenbau*. Berlin: Springer, 1921. ISBN: 978-3-662-24228-5.
- [57] R. M. Jones. *Mechanics of Composite Materials*. Boca Raton: CRC Press, 2014. ISBN: 1-56032-712-X.
- [58] S. Jose u. a. “Intralaminar Fracture Toughness of a Cross-Ply Laminate and its Constituent Sub-Laminates”. In: *Composites Science and Technology* 61.8 (2001), S. 1115–1122. ISSN: 02663538.
- [59] R. Kersten. *Das Reduktionsverfahren der Baustatik*. Berlin: Springer, 2012. ISBN: 978-3-642-93177-2.
- [60] R. Kindmann und M. Kraus. *Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau*. Hoboken: Wiley, 2013. ISBN: 978-3-433-60170-9.
- [61] B. Klein. *Leichtbau-Konstruktion: Berechnungsgrundlagen und Gestaltung*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2011. ISBN: 978-3-8348-1604-7.
- [62] H. Kossira. *Grundlagen des Leichtbaus: Einführung in die theorie dünnwandiger stabförmiger Tragwerke*. Springer, 2013. ISBN: 978-3-642-64846-5.
- [63] I. Lapczyk und J. A. Hurtado. “Progressive Damage Modeling in Fiber-Reinforced Materials”. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 38.11 (2007), S. 2333–2341.
- [64] V. Läßle. *Lösungsbuch zur Einführung in die Festigkeitslehre: Aufgaben, Ausführliche Lösungswege, Formelsammlung*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2008. ISBN: 978-3-8348-0452-5.
- [65] C. Lauter. “Entwicklung und Herstellung von Hybridbauteilen aus Metallen und Faserverbundkunststoffen für den Leichtbau im Automobil”. Diss. Universität Paderborn, 2014.
- [66] C. Lauter, M. Frantz und J.-P. Kohler. “Crash Tests of Hybrid Structures Consisting of Sheet Metal and Local CFRP Reinforcements”. In: *ECCM 2012 - Composites at Venice, Proceedings of the 15th European Conference on Composite Materials* (2012).
- [67] C. Lauter u. a. “Crash Worthiness of Hybrid Pillar Structures Consisting of Sheet Metal and Local CFRP Reinforcements”. In: *15th International Conference on Experimental Mechanics* (2012).
- [68] H. Lee. “Damage Modelling for Composite Structures”. Diss. Universität Manchester, 2015.
- [69] H. Lengsfeld u. a., Hrsg. *Composite Technology: Prepregs and Monolithic Part Fabrication Technologies*. Cincinnati: Hanser, 2016. ISBN: 978-1-56990-599-9.
- [70] Q. Liu u. a. “Energy Absorption of Bio-inspired Multi-cell CFRP and Aluminum Square Tubes”. In: *Composites Part B: Engineering* 121 (2017), S. 134–144. ISSN: 13598368.
- [71] Q. Liu u. a. “Experimental Investigation into Dynamic Axial Impact Responses of Double Hat Shaped CFRP Tubes”. In: *Composites Part B: Engineering* 79 (2015), S. 494–504. ISSN: 13598368.

- [72] J. Lopes u. a. “Single Lap Shear Stress in Hybrid CFRP/Steel Composites”. In: *Procedia Structural Integrity* 1 (2016), S. 58–65. ISSN: 24523216.
- [73] L. Mann. *Theorie der Rahmentragwerke auf neuer Grundlage*. Berlin: Springer, 1927.
- [74] A. Matzenmiller, J. Lubliner und R. L. Taylor. “A Constitutive Model for Anisotropic Damage in Fiber-Composites”. In: *Mechanics of Materials* 20 (1995), S. 125–152. ISSN: 01676636.
- [75] C. Mildner. “Numerische und experimentelle Untersuchungen des Crashverhaltens von FVK-verstärkten Metallstrukturbauteile”. Diss. Technische Universität München, 2014.
- [76] Y.-M. Moon, T.-H. Lee und Y.-P. Park. “Development of an Automotive Joint Model using an Analytically Based Formulation”. In: *Journal of Sound and Vibration* 220.4 (1999), S. 625–640. ISSN: 0022460X.
- [77] P. Naghipour u. a. “Numerical and Experimental Investigation on Lap Shear Fracture of Al/CFRP Laminates”. In: *Composites Science and Technology* 72.14 (2012), S. 1718–1724. ISSN: 02663538.
- [78] E. Nassiopoulos und J. Njuguna. “Finite Element Dynamic Simulation of Whole Rallying Car Structure - Towards Better Understanding of Structural Dynamics During Side Impacts”. In: *8th European LS-DYNA Users Conference* (2011).
- [79] M. Neitzel, P. Mitschang und U. Breuer. *Handbuch Verbundwerkstoffe: Werkstoffe, Verarbeitung, Anwendung*. München: Hanser, 2014. ISBN: 978-3-446-43696-1.
- [80] O. O. Ochoa und J. N. Reddy. *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Bd. 7. Solid Mechanics and its Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. ISBN: 0-7923-1125-6.
- [81] A. Osterfeld. *Die Deformationsmethode*. Berlin: Springer, 1926.
- [82] E. Pestel. “Anwendung von Übertragungsmatrizen auf die Torsion eines Kastenprofils”. In: *Z. angew. Math. Mech* 38 (1958), S. 465–466.
- [83] E. Pestel und O. Mahrenholtz. “Zum numerischen Problem der Eigenwertbestimmung mit Übertragungsmatrizen”. In: *Ingenieur-Archiv* (1958), S. 255–262.
- [84] Alf Pflüger. *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Berlin: Springer, 1975.
- [85] S. T. Pinho, P. Robinson und L. Iannucci. “Fracture Toughness of the Tensile and Compressive Fibre Failure Modes in Laminated Composites”. In: *Composites Science and Technology* 66.13 (2006), S. 2069–2079. ISSN: 02663538.
- [86] S. Pischinger und U. Seiffert, Hrsg. *Vieweg Handbuch Kraftfahrzeugtechnik*. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2016. ISBN: 978-3-658-09527-7.
- [87] L. M. Powers, S. M. Arnold und A. T. Baranski. “Using ABAQUS Scripting Interface for Materials Evaluation and Life Prediction”. In: *ABAQUS Users’ Conference* (2006).
- [88] A. Puck. *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis*. München: Carl Hanser, 1996. ISBN: 3446181946.
- [89] J. N. Reddy. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton, 2004. ISBN: 0-8493-1592-1.

- [90] K. Reifsnider. *Damage in composite materials*. Philadelphia: ASTM International, 1982.
- [91] B. Reuter, Hrsg. *Motorsport-Management: Grundlagen - Prozesse - Visionen*. Berlin: Springer, 2018. ISBN: 978-3-662-57702-8.
- [92] C. Reuter, K.-H. Sauerland und T. Tröster. “Experimental and Numerical Crushing Analysis of Circular CFRP Tubes under Axial Impact Loading”. In: *Composite Structures* 174 (2017), S. 33–44. ISSN: 02638223.
- [93] A. Riccio u. a. “Stacking Sequence Effects on Damage Onset in Composite Laminate Subjected to Low Velocity Impact”. In: *Procedia Engineering* 88 (2014), S. 222–229. ISSN: 18777058.
- [94] H. A. Richard und M. Sander. *Technische Mechanik: Lehrbuch mit Praxisbeispielen, Klausuraufgaben und Lösungen: Grundlagen - effektiv und anwendungsnah*. Wiesbaden: Vieweg, 2005. ISBN: 978-3-8348-0454-9.
- [95] M. Riemer. *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik: Für Studium und Beruf*. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015. ISBN: 978-3-658-07534-7.
- [96] K.-H. Schrader. “Übertragungsmatrizen bei Schwingungen dünnwandiger Stäbe mit offenen Profilen bei Kopplung von Biegung und Drillung”. In: *Ingenieur-Archiv* (1965), S. 321–329.
- [97] G. Schumpich und S. Spierig. “Zur Praxis der Berechnung von räumlichen Stabwerken mit Hilfe von Übertragungsmatrizen”. In: *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft* 13 (1961), S. 193–213.
- [98] H. Schürmann. *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Berlin: Springer, 2007. ISBN: 9783540721895.
- [99] T. Shigematsu, M. Ohga und T. Hara. “Ermittlung der Beultraglasten ausgesteifter Schalen mit Hilfe von Übertragungsmatrizen”. In: *Applied Mechanics* 62 (1990), S. 28–42.
- [100] D. K. Shin, H. C. Kim und J. J. Lee. “Numerical Analysis of the Damage Behavior of an Aluminum/CFRP Hybrid Beam under Three Point Bending”. In: *Composites Part B: Engineering* 56 (2014), S. 397–407. ISSN: 13598368.
- [101] M. H. Shojaeefard u. a. “Investigation on the Optimal Simplified Model of BIW Structure using FEM”. In: *Latin American Journal of Solids and Structures* 12.10 (2015), S. 1972–1990.
- [102] Siemens. *Improve Vehicle Handling by Deploying a Target Setting Process for Body Rigidity*. 14.11.2018.
- [103] V. V. Silberschmidt, Hrsg. *Dynamic Deformation, Damage and Fracture in Composite Materials and Structures*. Bd. 69. Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering. Elsevier Science, 2016. ISBN: 978-0-08-100870-6.
- [104] T. Sinmazçelik u. a. “A Review: Fibre Metal Laminates, Background, Bonding Types And Applied Test Methods”. In: *Materials & Design* 32.7 (2011), S. 3671–3685. ISSN: 02613069.
- [105] A. E.-D. A. El-Sisi u. a. “Efficient 3D Modeling of Damage in Composite Materials”. In: *Journal of Composite Materials* 49.7 (2015), S. 817–828. ISSN: 0021-9983.

- [106] P. Soden. “Lamina Properties, Lay-up Configurations and Loading Conditions for A Range of Fibre-reinforced Composite Laminates”. In: *Composites Science and Technology* (1998). ISSN: 02663538.
- [107] K. K. U. Stellbrink. *Micromechanics of Composites: Composite Properties of Fibre and Matrix Constituents*. München: Hanser, 1996. ISBN: 1-56990-206-2.
- [108] G. Stigliano u. a. “Advanced Vehicle Body Concept Modeling Approach using Reduced Models of Beams and Joints”. In: *Proceedings of ISMA2010 Including USD2010* (2010), S. 4179–4190.
- [109] R. Talreja. *Damage mechanics of composite materials*. Bd. 9. Composite materials series. Amsterdam: Elsevier, 1994. ISBN: 9780444888525.
- [110] R. Talreja. *Modeling Damage, Fatigue and Failure of Composite Materials*. Bd. 65. Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering. Oxford: Woodhead Publishing, 2016. ISBN: 978-1-78242-286-0.
- [111] R. Talreja und C. V. Singh. *Damage and Failure of Composite Materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. ISBN: 978-0-521-81942-8.
- [112] F. A. Thoma. “Lastübertragung im verformten System Lager-Welle-Zahnrad”. Diss. München: Technische Universität München, 2011.
- [113] M. Trzesniowski. *Rennwagentechnik: Grundlagen, Konstruktion, Komponenten, Systeme*. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014. ISBN: 978-3-8348-9540-0.
- [114] S. W. Tsai. “Strength Characteristics of Anisotropic and Laminated Composite Materials”. In: *Experimental Mechanics* 5.9 (1965), S. 283–288.
- [115] S. W. Tsai und E. M. Wu. “A General Theory of Strength for Anisotropic Materials”. In: *Journal of Composite Materials* (1971). ISSN: 0021-9983.
- [116] R. Uhrig. “The Transfer Matrix Method Seen as One Method of Structural Analysis Among Others”. In: *Journal of Sound and Vibration* (1965), S. 136–148. ISSN: 0022460X.
- [117] Y. Upreti, M. Erzgraeber und T. Fokylidis. “ANSA Scripting for Automated Pedestrian Marking and Simulation Input”. In: *6th BETA CAE International Conference* (2015).
- [118] A. P. Vassilopoulos und T. Keller. *Fatigue of Fiber-Reinforced Composites*. Engineering Materials and Processes. London: Springer, 2013. ISBN: 978-1-4471-2694-2.
- [119] C. A. J. R. Vermeeren. “An Historic Overview of the Development of Fibre Metal Laminates”. In: *Applied Composite Materials* 10 (2003).
- [120] C. H. Wang u. a. “Residual Strength of Composite Laminates Containing Scarfed and Straight-sided Holes”. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 42.12 (2011), S. 1951–1961.
- [121] G.-D. Wang, S. K. Melly und S. K. Ahmed. “Finite Element Study into the Effects of Fiber Orientations and Stacking Sequence on Drilling Induced Delamination in CFRP/Al Stack”. In: *Science and Engineering of Composite Materials* 25.3 (2018), S. 555–563. ISSN: 0792-1233.
- [122] Jifeng Wang u. a. “Mechanical Design of Wound Composite Impeller Using FEM”. In: *ASME 2010 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (2010).

- [123] J. Wiedemann. *Leichtbau: Elemente und Konstruktion*. Klassiker der Technik. Berlin: Springer, 2007. ISBN: 3-540-33656-7.
- [124] W. Wunderlich. “Zur Berechnung von Rotationsschalen mit Übertragungsmatrizen”. In: *Ingenieur-Archiv* (1967), S. 262–279.
- [125] X. Xiao. “A Coupled Damage-plasticity Model for Energy Absorption in Composite”. In: *International Journal of Damage Mechanics* 19.6 (2010), S. 727–751. ISSN: 1056-7895.
- [126] T. Yamaguchi, T. Okabe und S. Yashiro. “Fatigue Simulation for Titanium/CFRP Hybrid Laminates using Cohesive Elements”. In: *Composites Science and Technology* 69.11-12 (2009), S. 1968–1973. ISSN: 02663538.
- [127] W. C. Young, R. G. Budynas und R. J. Roark. *Roark’s Formulas for Stress and Strain*. New York: McGraw-Hill, 2011. ISBN: 0-07-072542-X.
- [128] G. Zhu u. a. “On Crushing Characteristics of Different Configurations of Metal-composites Hybrid Tubes”. In: *Composite Structures* 175 (2017), S. 58–69. ISSN: 02638223.
- [129] Z. H. Zuo und Y. M. Xie. “A Simple and Compact Python Code for Complex 3D Topology Optimization”. In: *Advances in Engineering Software* 85 (2015), S. 1–11. ISSN: 09659978.
- [130] R. Zurmühl. “Berechnung von Biegeschwingungen abgesetzter Wellen mit Zwischenbedingungen mittels Übertragungsmatrizen”. In: *Ingenieur-Archiv* (1958).

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die folgenden Studien-, Bachelor-, Masterarbeiten betreut, ohne explizit erwähnt worden zu sein:

J. Steindl: Fertigung hybrider Faserverbundrohrstrukturen für den modernen Motorsport, Technische Hochschule Ingolstadt, 2013 (unveröffentlicht).

M. Roth: Schadensanalyse an einem hybriden Faserverbund-Metall-Tragwerk im modernen Motorsport und Entwicklung von Methoden zur Bewertung der Schadensauswirkung, Technische Hochschule Ingolstadt, 2014 (unveröffentlicht).

B. Eisenschenk: Entwicklung eines Konzeptes zur Wiederherstellung relevanter Festigkeitseigenschaften von Metall-Faserverbund-Hybridrohren für die Anwendung im Motorsport, Technische Hochschule Ingolstadt, 2015 (unveröffentlicht).

A. Gassner: Entwicklung, Evaluierung und Optimierung der Fahrdynamik eines Hybrid-Metall-Faserverbund- Rohrelementes mithilfe eines MATLAB basierenden Auswertungstools, sowie der Erfassung von relevanten Messdaten zur Anwendung im Motorsport, 2016 (unveröffentlicht).

V. Giesbrecht: Einbau- und fertigungsgerechte Konstruktion eines Überrollkäfigs in Metall-Faserverbund-Hybridbauweise zur Anwendung im modernen Motorsport, Technische Hochschule Ingolstadt, 2016 (unveröffentlicht).

L. Ringel: Implementierung und Vergleich des Übertragungsmatrizenverfahrens und Deformationsverfahrens in einem auf MATLAB basierenden Simulationsmodell zur Berechnung räumlicher stark verzweigter Tragwerkstrukturen, Technische Hochschule Ingolstadt, 2016 (unveröffentlicht).